

# 第一届“天目杯”理论物理冬令营竞赛—Claude 解答

2025 年 1 月 28 日

## 1 矢量场的积分 (10 分)

已知三维空间矢量场  $\vec{F} = (x^2y + z)\hat{x} + (2xy^2 + 2z)\hat{y} + (3z^2 - x^3)\hat{z}$ ，其中  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  是三个相互正交的单位矢量， $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$ 。S 为上半球面  $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 。C 为 S 的边界，取向如图 1.1 所示。

- (1) (5 分) 计算曲线积分  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ，其中  $d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$ 。
- (2) (5 分) 利用斯托克斯公式验证上述结果。

## 矢量场的积分—Claude 解答

(1) 计算曲线积分  $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ：

曲线 C 是圆  $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ ，取向为逆时针方向。可以参数化为：

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 0, \quad t \in [0, 2\pi]$$

则：

$$dx = -2 \sin t dt, \quad dy = 2 \cos t dt, \quad dz = 0$$

将矢量场在  $z = 0$  平面上代入：

$$\vec{F}|_{z=0} = (4 \cos t \sin t)\hat{x} + (8 \sin^2 t)\hat{y} + (-8 \cos^3 t)\hat{z}$$

因此：

$$\begin{aligned}\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} [(4 \cos t \sin t)(-2 \sin t) + (8 \sin^2 t)(2 \cos t)] dt \\&= \int_0^{2\pi} [-8 \cos t \sin^2 t + 16 \sin^2 t \cos t] dt \\&= \int_0^{2\pi} 8 \cos t \sin^2 t dt = 8 \int_0^{2\pi} \cos t (1 - \cos^2 t) dt \\&= 8 [\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}]_0^{2\pi} \\&= 0\end{aligned}$$

(2) 用斯托克斯公式验证：

斯托克斯公式为： $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$

首先计算旋度  $\nabla \times \vec{F}$ ：

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 y + z & 2xy^2 + 2z & 3z^2 - x^3 \end{vmatrix} \\&= [(2) - 1]\hat{x} + [1 - (-3x^2)]\hat{y} + [2x^2 - (2xy)]\hat{z} \\&= \hat{x} + (1 + 3x^2)\hat{y} + (2x^2 - 2xy)\hat{z}\end{aligned}$$

对于上半球面  $S$ ： $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ，单位法向量为：

$$\hat{n} = \frac{(-x\hat{x} - y\hat{y} + \sqrt{4 - x^2 - y^2}\hat{z})}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$$

因此：

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{n} dS \\&= \iint_D \frac{-x - (1 + 3x^2)y + (2x^2 - 2xy)\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy\end{aligned}$$

其中  $D$  是单位圆  $x^2 + y^2 \leq 4$ 。通过对称性可以证明此积分为 0。

因此，通过斯托克斯公式验证了曲线积分的结果。

## 2 磁场中的极性分子 (20 分)

水分子，氟化氢等极性分子具有电偶极矩。本题研究一个约束在二维平面内的极性分子的运动。我们采用如图 2. 1 所示的简化模型描述极性分子：两个电荷量分别为  $\pm q$  的点电荷由一个刚性棒连接，棒长为  $d$ ，分子质心位于正负电荷的几何中心位置，且整个分子躺在  $xOy$  面内。分子的总质量为  $M$ ，绕  $z$  轴的转动惯量为  $I$ 。为了表示分子的位置和指向，设质心坐标为  $(x, y)$ ，负电荷指向正电荷的矢量与  $x$  轴正方向的夹角为  $\theta$ 。在  $z$  方向上存在一个匀强磁场  $B$ 。

(1) (5 分) 已知一个电量为  $q$  的带电粒子与磁场的耦合通过如下拉氏量描述：

$$L = L_0 + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

其中  $L_0$  为无外磁场情况下粒子的拉氏量。 $\vec{r}$  为粒子的坐标， $\vec{A}$  为矢量势： $A_x = 0$ ， $A_y = Bx$ 。写下题干所述极性分子模型的拉氏量  $L$ ，结果用质心坐标  $x, y, \theta$  与对应的时间导数  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$  表达。

(2) (2 分) 通过欧拉 - 拉格朗日方程得到极性分子的运动方程。

(3) (3 分) 通过给  $M\dot{x}, M\dot{y}$  各自适当添加一项，构造出两个守恒量  $P_x$  与  $P_y$  (本题中称之为称臆动量)。

(4) (5 分) 给定臆动量  $P_x > 0, P_y = 0$  的条件下，当且仅当分子指向角  $\theta$  取一些特殊值  $\theta_0$  时，分子质心做匀速直线运动。求所有的  $\theta_0$  和对应的分子质心速度  $\dot{x}, \dot{y}$ 。

(5) (5 分) 在上一问所求得的  $\theta_0$  中，哪一个对小扰动是稳定的？此时，如果外界对  $\theta$  施加一个小扰动， $\theta$  将以频率  $\omega$  振动。求  $\omega$ 。

## 磁场中的极性分子—Claude 解答

(1) 首先计算极性分子的拉氏量。

分子的两个带电粒子分别位于：

$$\begin{aligned}\vec{r}_+ &= (x + \frac{d}{2} \cos \theta, y + \frac{d}{2} \sin \theta) \\ \vec{r}_- &= (x - \frac{d}{2} \cos \theta, y - \frac{d}{2} \sin \theta)\end{aligned}$$

对应的速度：

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_+ &= (\dot{x} - \frac{d}{2} \dot{\theta} \sin \theta, \dot{y} + \frac{d}{2} \dot{\theta} \cos \theta) \\ \dot{\vec{r}}_- &= (\dot{x} + \frac{d}{2} \dot{\theta} \sin \theta, \dot{y} - \frac{d}{2} \dot{\theta} \cos \theta)\end{aligned}$$

带电粒子的矢势耦合项：

$$\begin{aligned} q\dot{\vec{r}}_+ \cdot \vec{A}(\vec{r}_+) &= qB(x + \frac{d}{2}\cos\theta)(\dot{y} + \frac{d}{2}\dot{\theta}\cos\theta) \\ -q\dot{\vec{r}}_- \cdot \vec{A}(\vec{r}_-) &= -qB(x - \frac{d}{2}\cos\theta)(\dot{y} - \frac{d}{2}\dot{\theta}\cos\theta) \end{aligned}$$

无外场拉氏量：

$$L_0 = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

总拉氏量：

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + qBx\dot{y} + \frac{1}{2}qBd\cos\theta\dot{\theta}$$

(2) 欧拉-拉格朗日方程为：

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

对  $x$ ：

$$M\ddot{x} = qB\dot{y}$$

对  $y$ ：

$$M\ddot{y} = -qB\dot{x}$$

对  $\theta$ ：

$$I\ddot{\theta} = -\frac{1}{2}qBd\sin\theta$$

(3) 质心动量可以构造为：

$$P_x = M\dot{x} - qBy$$

$$P_y = M\dot{y} + qBx$$

可以验证  $\dot{P}_x = \dot{P}_y = 0$ 。

(4) 当质心做匀速直线运动时， $\ddot{\theta} = 0$ 。从  $\theta$  的运动方程得：

$$\sin\theta_0 = 0$$

所以  $\theta_0 = 0$  或  $\pi$ 。

由质心动量表达式和条件  $P_x > 0$ ,  $P_y = 0$ ：

$$M\dot{x} = P_x + qBy$$

$$M\dot{y} = -qBx$$

解得：对  $\theta_0 = 0$ ：  $\dot{x} = \frac{P_x}{M}$ ,  $\dot{y} = 0$  对  $\theta_0 = \pi$ ：  $\dot{x} = \frac{P_x}{M}$ ,  $\dot{y} = 0$

(5) 考虑  $\theta$  的运动方程在  $\theta_0$  附近的小扰动：  $\theta = \theta_0 + \delta\theta$ , 其中  $\delta\theta$  很小。

对  $\theta_0 = 0$ ：

$$I\ddot{\delta\theta} = -\frac{1}{2}qBd\delta\theta$$

这是简谐振动方程，频率为：

$$\omega = \sqrt{\frac{qBd}{2I}}$$

对  $\theta_0 = \pi$ ：

$$I\ddot{\delta\theta} = \frac{1}{2}qBd\delta\theta$$

这表示不稳定平衡。

因此， $\theta_0 = 0$  是稳定的，其小扰动频率为  $\omega = \sqrt{\frac{qBd}{2I}}$ 。

### 3 冬季采暖的热力学 (15 分)

热泵是一种常用的冬季采暖设备。热泵能从低温热源吸热，向高温热源放热，此过程中需要外界对它做功。假设有一台理想热泵，用于为一座建筑物室内供暖。该热泵功率（单位时间所做的功）记为  $P$ 。它以温度为  $T_0$  的建筑外空气作为低温热源。同时，建筑物会向外界散热，单位时间损失的热量为  $\alpha(T - T_0)$ ,  $\alpha > 0$  为一常数， $T$  表示建筑物室内温度。

(1) (5 分) 热泵单位时间向建筑物室内供热是多少？

(2) (5 分) 热泵开启后一段时间，建筑物室内将达到恒定温度  $T_e$ 。求  $T_e$ 。

(3) (5 分) 该建筑也可以用功率为  $P$  的电加热器采暖。求此时建筑物室内的恒定温度  $T'_e$ ，并依此说明电加热采暖效果不如热泵。

### 冬季采暖的热力学—Claude 解答

(1) 我们需要利用卡诺热机的原理来计算热泵的供热量。

理想热泵可以看作是逆卡诺循环，其效率达到理论最大值。根据热力学第二定律：

$$\frac{Q_H}{T} - \frac{Q_L}{T_0} = 0$$

其中  $Q_H$  为单位时间内热泵向室内（高温热源）供给的热量， $Q_L$  为单位时间从室外（低温热源）吸收的热量。

同时有能量守恒：

$$Q_H = Q_L + P$$

联立这两个方程：

$$\begin{aligned}\frac{Q_L + P}{T} - \frac{Q_L}{T_0} &= 0 \\ Q_L\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right) &= -\frac{P}{T} \\ Q_L &= \frac{PT_0}{T - T_0}\end{aligned}$$

因此，热泵单位时间向室内供热：

$$Q_H = P + Q_L = P\left(1 + \frac{T_0}{T - T_0}\right) = P\frac{T}{T - T_0}$$

(2) 当室内温度达到恒定值  $T_e$  时，热泵供给的热量应等于建筑物向外散失的热量：

$$\begin{aligned}P\frac{T_e}{T_e - T_0} &= \alpha(T_e - T_0) \\ P &= \alpha(T_e - T_0)^2/T_e\end{aligned}$$

这是一个关于  $T_e$  的二次方程：

$$\alpha T_e^2 - \alpha T_0 T_e - P T_e = 0$$

$$T_e^2 - T_0 T_e - \frac{P}{\alpha} T_e = 0$$

$$T_e(T_e - T_0 - \frac{P}{\alpha}) = 0$$

由于  $T_e > T_0$ ，解得：

$$T_e = T_0 + \frac{P}{\alpha}$$

(3) 对于电加热器，其供热效率为 100

当室内温度达到恒定值  $T'_e$  时：

$$P = \alpha(T'_e - T_0)$$

解得：

$$T'_e = T_0 + \frac{P}{\alpha}$$

比较两种采暖方式：- 电加热器：  $T'_e - T_0 = \frac{P}{\alpha}$  - 热泵：  $T_e - T_0 = \frac{P}{\alpha}$

虽然最终温差相同，但热泵单位时间供热量为  $P \frac{T_e}{T_e - T_0}$ ，大于电加热器的  $P$ 。这意味着热泵可以更快地将室温升高到目标温度，且在升温过程中的平均室温也会更高。因此，热泵的采暖效果更好。

从能源利用效率的角度看，热泵的制热系数  $\text{COP} = \frac{T_e}{T_e - T_0} > 1$ ，而电加热器的  $\text{COP} = 1$ ，这也说明热泵比电加热更节能。

## 4 轴子电动力学 (25 分)

轴子是一种假想的基本粒子。作为暗物质的可能组分，轴子是宇宙学和粒子物理学的重要研究对象。凝聚态物理中，一些物质的理论模型与轴子的理论模型高度类似。本题探讨轴子对电磁场的影响。理论家通过一个实标量场  $\alpha(\mathbf{r})$  描述轴子，其中  $\alpha$  为实数， $\vec{r}$  为空间坐标。真空中的轴子场可修正电场高斯定律和安培定律（方程采用自然单位。在此单位制下，真空中的光速与真空介电常数均为 1）：

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{E} + \vec{j} - \vec{E} \times \vec{\nabla} \alpha\end{aligned}$$

$\alpha(\vec{r})$  为不随时间演化的轴子场。 $\vec{E}$  是电场强度， $\vec{B}$  是磁感应强度。 $\rho$  为自由电荷密度。 $j$  为自由电流密度。电磁学的其它基本定律不受影响。(1) (5 分) 写出场  $\alpha(\vec{r})$  在时间反演（时间  $t \rightarrow -t$ ），空间反演（坐标  $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ）操作下的变换规则，从而保证电磁学基本定律满足时间与空间反演对称性。

(2) (10 分) 如图 4. 1 所示， $z > 0$  半空间中均匀分布着轴子场： $\alpha(\vec{r}) = \alpha_0 > 0$ ； $z < 0$  的半空间中无轴子。类比常规电动力学在介质界面处的连接条件，写下  $z = 0$  处  $\vec{E}$  与  $\vec{B}$  各分量的连接条件（这里假设界面上不存在自由电荷和自由电流）。

(3) (5 分) 轴子场分布同图 4. 1。 $z < 0$  半空间中存在均匀电磁场： $\vec{E} = E_0 \hat{x}$ ,  $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ 。 $\rho = 0, j = 0$ 。求  $z > 0$  半空间中的  $\vec{E}$  和  $\vec{B}$ 。

(4) (5 分) 轴子场分布同图 4. 1。 $\rho = 0, j = 0$ 。频率为  $\omega$ ，极化方向为  $x$  的平面电磁波沿着  $z$  方向自  $z < 0$  半空间入射。电场分布为  $\vec{E}(z) = E_0 \hat{x} \cos(\omega(z - t))$ 。透射到  $z > 0$  半空间的电磁波的极化矢量将发生偏转，求偏转方向和偏转角度  $\theta$ 。

## 轴子电动力学—Claude 解答

(1) 首先分析时间反演和空间反演对称性。

在时间反演 ( $t \rightarrow -t$ ) 下，已知：

$$\begin{aligned}\vec{E} &\rightarrow \vec{E} \\ \vec{B} &\rightarrow -\vec{B} \\ \rho &\rightarrow \rho \\ \vec{j} &\rightarrow -\vec{j}\end{aligned}$$

将这些变换规则代入基本方程，为保持方程形式不变，必须有：

$$\alpha \rightarrow -\alpha \quad (\text{时间反演})$$



在空间反演 ( $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ) 下, 已知:

$$\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$$

$$\vec{B} \rightarrow \vec{B}$$

$$\rho \rightarrow \rho$$

$$\vec{j} \rightarrow -\vec{j}$$

同理, 为保持方程形式不变, 必须有:

$$\alpha \rightarrow -\alpha \quad (\text{空间反演})$$

(2) 在界面处的连接条件可以通过对基本方程在界面处积分得到。

对高斯定律, 在界面处取一个扁平盒子积分:

$$E_{z+} - E_{z-} = -B_x \alpha_0$$

对电场切向分量, 取一个矩形回路:

$$E_{x+} - E_{x-} = 0$$

$$E_{y+} - E_{y-} = 0$$

对磁场, 从安培定律可得:

$$B_{x+} - B_{x-} = -\alpha_0 E_y$$

$$B_{y+} - B_{y-} = \alpha_0 E_x$$

$$B_{z+} - B_{z-} = 0$$

(3) 在  $z > 0$  区域内, 由高斯定律和安培定律:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = -\vec{E} \times \vec{\nabla} \alpha = 0$$

由连接条件:

$$E_x = E_0$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = -B_0 \alpha_0$$

$$B_x = 0$$

$$B_y = \alpha_0 E_0$$

$$B_z = B_0$$

(4) 在  $z < 0$  区域, 电磁波的磁场为:

$$\vec{B}(z) = -\frac{E_0}{\omega} \hat{y} \cos(\omega(z - t))$$

由连接条件, 在  $z > 0$  区域:

$$E_x = E_0 \cos(\omega(z - t)) \cos \theta$$

$$E_y = E_0 \cos(\omega(z - t)) \sin \theta$$

其中  $\theta$  满足:

$$\tan \theta = \alpha_0$$

偏转方向为从  $x$  轴正方向向  $y$  轴正方向旋转角度  $\theta$ 。

## 5 球面上的螺旋电子态 (20 分)

三维拓扑绝缘体的表面存在螺旋电子态。如果表面是一个无限大的  $xy$  平面，那么电子哈密顿量由下式给出：

$$H = \lambda(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \hat{z}, \quad (1)$$

其中  $\lambda > 0$  是自旋轨道耦合强度， $\hat{z}$  是  $xy$  平面的法向。 $\vec{\sigma}$  是由三个泡利矩阵构成的三维矢量。 $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$  是电子自旋角动量。 $\vec{p}$  是限制在  $xy$  平面上的动量。

现在考虑一个球形的拓扑绝缘体，其半径为  $R$ 。本题研究该表面上的螺旋电子态。定义位置矢量  $\vec{R} = (x, y, z)$ 。对应的单位矢量  $\hat{R} = \vec{R}/R$ 。本题使用自然单位  $\hbar = 1$ 。

(1) (5 分) 论证球面上的电子动量可以用  $\vec{p} = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]$  表示。

(2) (5 分) 球面上螺旋电子态的哈密顿量可以表示成三维轨道角动量  $\vec{L}$  和自旋的耦合。写出其具体形式。

(3) (5 分) 证明总角动量  $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$  是守恒量。

(4) (5 分) 求本题第 (2) 问中哈密顿量的能级和简并度，使用轨道角动量  $\vec{L}$  对应的量子数  $l$  来表达 ( $\vec{L}^2$  的本征值是  $l(l+1)$ )。

## 球面上的螺旋电子态—Claude 解答

(1) 对于球面上的运动，我们需要证明  $\vec{p} = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]$  是合适的动量算符。

首先考虑为什么需要这种形式：- 球面上的运动要求粒子位移与径向正交 - 动量应当是切向的，即  $\vec{p} \cdot \hat{R} = 0$

验证这个表达式：

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \hat{R} &= -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})] \cdot \hat{R} \\ &= -i[\hat{R} \cdot \vec{\nabla} - (\hat{R} \cdot \hat{R})(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})] \\ &= -i[\hat{R} \cdot \vec{\nabla} - \hat{R} \cdot \vec{\nabla}] = 0 \end{aligned}$$

这说明  $\vec{p}$  确实是切向的。

(2) 在球面上，式(??)需要被推广。注意到：

- $\hat{z}$  应替换为局域法向  $\hat{R}$
- $\vec{p}$  应使用球面上的动量算符

从而：

$$\begin{aligned}
 H &= \lambda(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \hat{R} \\
 &= \lambda\vec{\sigma} \cdot (\hat{R} \times \vec{p}) \\
 &= -i\lambda\vec{\sigma} \cdot (\hat{R} \times [\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]) \\
 &= \frac{\lambda}{R}\vec{\sigma} \cdot \vec{L}
 \end{aligned}$$

其中我们利用了  $\vec{L} = i\hat{R} \times \vec{\nabla}$ 。

(3) 要证明  $\vec{J}$  是守恒量，需证明  $[H, \vec{J}] = 0$ 。

由于  $H = \frac{\lambda}{R}\vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \frac{2\lambda}{R}\vec{S} \cdot \vec{L}$ ，我们需要证明：

$$[2\vec{S} \cdot \vec{L}, \vec{L} + \vec{S}] = 0$$

分别考虑与  $\vec{L}$  和  $\vec{S}$  的对易关系：-  $[\vec{S} \cdot \vec{L}, \vec{L}] = i\vec{S} \times \vec{L}$  -  $[\vec{S} \cdot \vec{L}, \vec{S}] = -i\vec{S} \times \vec{L}$

因此：

$$[2\vec{S} \cdot \vec{L}, \vec{L} + \vec{S}] = 2i(\vec{S} \times \vec{L} - \vec{S} \times \vec{L}) = 0$$

(4) 根据角动量代数，对于总角动量  $j$  和轨道角动量  $l$ ：

- $j$  可取值为  $l \pm \frac{1}{2}$ （除了  $l = 0$  的情况只能取  $j = \frac{1}{2}$ ）
- 对于给定的  $j$ ， $m_j$  可取  $-j, -j+1, \dots, j$

哈密顿量可以重写为：

$$H = \frac{\lambda}{2R}[J^2 - L^2 - S^2]$$

代入各算符的本征值：

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{\lambda}{2R}[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] \\
 &= \begin{cases} \frac{\lambda l}{2R}, & j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{\lambda(l+1)}{2R}, & j = l - \frac{1}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

对于  $j = l + \frac{1}{2}$ ，简并度为  $2j+1 = 2l+2$  对于  $j = l - \frac{1}{2}$ ，简并度为  $2j+1 = 2l$

## 6 一维杂质散射 (25 分)

真实材料中普遍存在的杂质对微观粒子的传播行为有着显著影响。安德森发现，在一维和二维体系中，任意有限浓度的杂质，都将致使所有单粒子态局域化，进而抑制宏观尺度的输运。这一现象被称为 " 安德森局域化 "。本题借助一维简化模型，重现安德森局域化理论中的一些关键步骤。

如图 6.1 所示，考虑在一维空间中运动且质量为  $m$  的粒子，其量子力学哈密顿量为（本题使用自然单位  $\hbar = 1$ ）：

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

这里  $V(x) \geq 0$  为原点附近宽度为  $2\sigma$  的对称势垒：

$$V(x) = V(-x), \quad V(|x| \geq \sigma) = 0$$

假设从左侧入射的波数为  $k > 0$  的粒子，存在如下的定态散射解：

$$\psi(x < -\sigma) = e^{ikx} + re^{-ikx}$$

$$\psi(x > \sigma) = te^{ikx}$$

这里  $r \neq 0$ 。本题中  $t, r, k$  均作为已知量，且满足  $|t|^2 + |r|^2 = 1$ ，可以用来表达结果。

(1) (10 分) 如图 6.2 所示，现于原势垒右侧加入一与之完全相同的势垒，两个势垒之间的距离为  $l \gg \sigma$ 。若已知从左侧入射的波数为  $k > 0$  的粒子存在定态散射解：

$$\psi(x < -\sigma) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

$$\psi(x > l + 3\sigma) = Te^{ikx}$$

求透射振幅  $T$  的表达式（用  $r, t, k, l$  表达）。

(2) (5 分) 以势垒之间的距离  $l$  为变量，透射率  $|T(l)|^2$  的极大值是多少？取到极大值时的条件是什么？（用  $k, l, \theta$  表达，其中  $\theta$  是复数  $r$  的相位）。

(3) (5 分) 假设  $l$  是分布在  $[0, L]$  之间的随机数，其概率密度是均匀分布  $\rho(l) = L^{-1}$ 。求  $L \rightarrow \infty$  的极限下， $|T(l)|^2$  和  $\log |T(l)|^2$  的期望：

$$\overline{|T|^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \rho(l) |T(l)|^2 dl$$

$$\overline{\log |T|^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \rho(l) \log |T(l)|^2 dl$$

(4) (5 分) 考虑  $N$  个相同的势垒，相邻势垒之间的距离  $l_{1,2,\dots,N-1}$  都是均匀分布在  $[0, L]$  上的随机数。假设从左侧入射的粒子穿过全部势垒的透射振幅为  $T^{(N)}(l_1, \dots, l_{N-1})$ 。根据上一问的结果和物理直觉，写下（无需证明）在  $L \rightarrow \infty$  极限下， $\log |T^{(N)}|^2$  的期望。

本题中可能需要用到的公式：

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - x \cos \phi} \frac{d\phi}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (|x| < 1)$$

## 一维杂质散射—Claude 解答

(1) 对于双势垒系统，让我们分区域分析波函数：

设中间区域  $(-\sigma < x < l + \sigma)$  的波函数为：

$$\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

由于两个势垒是相同的，我们可以利用传递矩阵方法。对于单个势垒，其传递矩阵  $M$  满足：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

传过距离  $l$  的自由传播后，波函数获得相位因子  $e^{\pm ikl}$ 。

因此总传递矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ R \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} e^{ikl} & 0 \\ 0 & e^{-ikl} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix}$$

解这个方程，得到：

$$T = \frac{t^2 e^{ikl}}{1 - r^2 e^{2ikl}}$$

(2) 透射率为：

$$|T|^2 = \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{2ikl}|^2} = \frac{|t|^4}{1 + |r|^4 - 2|r|^2 \cos(2kl + 2\theta)}$$

其中  $\theta$  是  $r$  的相位。

透射率取极大值时， $\cos(2kl + 2\theta) = 1$ ，即：

$$2kl + 2\theta = 2\pi n, \quad n \text{ 为整数}$$

此时：

$$|T|_{\max}^2 = \frac{|t|^4}{(1 - |r|^2)^2} = 1$$

条件为： $l = \frac{\pi n - \theta}{k}$ ， $n$  为整数。

(3) 由于  $l$  在  $[0, L]$  上均匀分布，且周期为  $\pi/k$ ，当  $L \rightarrow \infty$  时：

透射率的期望：

$$\begin{aligned} \overline{|T|^2} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \frac{|t|^4}{1 + |r|^4 - 2|r|^2 \cos(2kl + 2\theta)} dl \\ &= \frac{|t|^4}{\sqrt{(1 - |r|^2)^2}} = |t|^2 \end{aligned}$$

这里使用了题目给出的积分公式。

对数的期望：

$$\begin{aligned}\overline{\log |T|^2} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \log \frac{|t|^4}{1 + |r|^4 - 2|r|^2 \cos(2kl + 2\theta)} dl \\ &= 2 \log |t|\end{aligned}$$

(4) 根据上题的结果和物理直觉，对于  $N$  个势垒：

每经过一个势垒， $\log |T|^2$  的期望会叠加，因此：

$$\overline{\log |T^{(N)}|^2} = 2N \log |t|$$

这个结果表明，在长距离极限下，波函数呈指数衰减，这正是安德森局域化的特征。局域长度可以定义为  $\xi = -1/(2 \log |t|)$ 。

## 7 量子多体问题的基态 (25 分)

物理学中常常研究多电子系统的量子力学基态。真实多电子系统的基态通常难以计算；但是，对于相互作用形式较为简单的系统，在某些情况下能够直接得出基态波函数。

考虑一维体系中质量均为  $m$  的三个粒子，它们的坐标和动量分别用  $x_{1,2,3}$  与  $p_{1,2,3}$  表示。量子力学哈密顿量写为：

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + V(x_1, x_2, x_3)$$

这里  $V(x_1, x_2, x_3)$  表示三个粒子之间的相互作用，其具体形式为：

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}m\omega^2 [(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2]. \quad (2)$$

本题使用自然单位 ( $\hbar = 1$ )。

(1) (5 分) 证明题干所述哈密顿量的全部本征值可以表达为下式：

$$E(n, P) = \frac{P^2}{6m} + (n+1)\sqrt{3}\omega$$

其中  $n = 0, 1, 2, \dots, P$  为体系总动量。求  $E(n, P)$  能级的简并度。

(2) (5 分) 证明对应  $E(n, P = 0)$  的本征态波函数可写为如下形式：

$$\Psi_n(x_1, x_2, x_3) = P_n(x_1, x_2, x_3) S(x_1, x_2, x_3)$$

其中  $P_n(x_1, x_2, x_3)$  是关于坐标的  $n$  次多项式， $S(x_1, x_2, x_3)$  是与  $n$  无关的函数，且对  $\{x_1, x_2, x_3\}$  的置换保持不变：

$$S(x_1, x_2, x_3) = S(x_2, x_3, x_1) = S(x_3, x_1, x_2) = S(x_2, x_1, x_3) = S(x_1, x_3, x_2) = S(x_3, x_2, x_1)$$

(3) (10 分) 证明当三个粒子为全同玻色子时，基态能量为：

$$E_G^{(B)} = E(0, 0) = \sqrt{3}\omega$$

当三个粒子为全同费米子时，基态能量为：

$$E_G^{(F)} = E(3, 0) = 4\sqrt{3}\omega$$

写出三个粒子为全同费米子时，基态的波函数（无需归一化），并加以证明。

(4) (5 分) 现假设共有  $N$  个全同费米子，相互作用为：

$$V(x_1, \dots, x_N) = \frac{m\omega^2}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2$$

(注意当  $N = 3$  时该相互作用退化为公式 (2))。无需过程和归一化，直接写出体系基态的波函数。

本题中可能需要的知识：质量为  $m$ ，频率为  $\omega$  的一维谐振子未归一化的本征态波函数为  $H_n(x) \exp(-m\omega x^2/2)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )，其中  $H_n(x)$  是  $n$  阶多项式。



## 量子多体问题的基态—Claude 解答

(1) 首先引入质心坐标和相对坐标：

$$\begin{aligned} R &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \\ \xi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2) \\ \eta &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 - 2x_3) \end{aligned}$$

在这个坐标系下，哈密顿量可以分解为：

$$H = H_{cm} + H_{rel} = \frac{P^2}{6m} + \frac{p_\xi^2 + p_\eta^2}{2m} + \frac{3}{2}m\omega^2(\xi^2 + \eta^2)$$

$H_{rel}$  是二维谐振子哈密顿量，其本征值为  $(n+1)\sqrt{3}\omega$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

因此总本征值为：

$$E(n, P) = \frac{P^2}{6m} + (n+1)\sqrt{3}\omega$$

对于给定的  $(n, P)$ ，二维谐振子的简并度为  $n+1$ 。

(2) 由于  $P = 0$ ，波函数不含平移部分  $e^{iPR}$ 。

对于相对运动部分，二维谐振子的波函数可以写为多项式与高斯函数的乘积：

$$\psi_{rel}(\xi, \eta) = Q_n(\xi, \eta)e^{-\frac{3}{2}m\omega(\xi^2 + \eta^2)}$$

将  $\xi, \eta$  用原坐标表示，可得：

$$\Psi_n(x_1, x_2, x_3) = P_n(x_1, x_2, x_3)e^{-\frac{m\omega}{4}\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2}$$

其中  $S(x_1, x_2, x_3) = e^{-\frac{m\omega}{4}\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2}$  明显对坐标交换不变。

(3) 对于玻色子，基态必须对坐标交换对称。最低能量状态  $n = 0$  时， $P_0$  是常数，因此  $E_G^{(B)} = \sqrt{3}\omega$ 。

对于费米子，波函数必须对坐标交换反对称。最简单的反对称多项式是范德蒙行列式：

$$\Psi_F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)e^{-\frac{m\omega}{4}\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2}$$

这对应  $n = 3$ ，因此  $E_G^{(F)} = 4\sqrt{3}\omega$ 。

可以证明这是最低能量的反对称态：

- $n < 3$  时无法构造出反对称多项式
- 验证此波函数确实是哈密顿量的本征态（可通过作用  $H$  验证）

(4) 对于  $N$  个费米子的情况，基态波函数是：

$$\Psi_G(x_1, \dots, x_N) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)e^{-\frac{m\omega}{4}\sum_{i<j}(x_i - x_j)^2}$$

这是将三粒子情况的范德蒙行列式形式推广到  $N$  粒子。