

第一届 " 天目杯 " 理论物理冬令营竞赛—ChatGPT4-o1 解答

2025 年 1 月 27 日

1 矢量场的积分 (10 分)

已知三维空间矢量场 $\vec{F} = (x^2y + z)\hat{x} + (2xy^2 + 2z)\hat{y} + (3z^2 - x^3)\hat{z}$ ，其中 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 是三个相互正交的单位矢量， $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$ 。S 为上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 。C 为 S 的边界，取向如图 1. 1 所示。

(1) (5 分) 计算曲线积分 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ，其中 $d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$ 。

(2) (5 分) 利用斯托克斯公式验证上述结果。

矢量场的积分—o1 解答

给定三维空间矢量场

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2y + z)\hat{x} + (2xy^2 + 2z)\hat{y} + (3z^2 - x^3)\hat{z},$$

其中 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 互相正交且 $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$ 。S 为上半球面

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},$$

其边界曲线记为 C，取向如题意所示（从上往下看为逆时针方向）。要求：

(1) 计算曲线积分 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ 。

(2) 利用斯托克斯公式验证上述结果。

(1) 计算 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

上半球面的边界 C 位于平面 $z = 0$ 上, 即圆周 $x^2 + y^2 = 4, z = 0$ 。可对该圆进行如下参数化:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t, \quad z = 0, \quad t \in [0, 2\pi).$$

则有

$$dx = -2 \sin t \, dt, \quad dy = 2 \cos t \, dt, \quad dz = 0.$$

于是

$$d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z} = -2 \sin t \, dt \hat{x} + 2 \cos t \, dt \hat{y} + 0 \hat{z}.$$

在 $z = 0$ 平面上, $\vec{F}(x, y, 0)$ 化为

$$\vec{F}(x, y, 0) = (x^2 y + 0) \hat{x} + (2x y^2 + 2 \cdot 0) \hat{y} + (3 \cdot 0^2 - x^3) \hat{z} = (x^2 y) \hat{x} + (2x y^2) \hat{y} - x^3 \hat{z}.$$

将 $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t$ 代入得

$$x^2 y = (2 \cos t)^2 (2 \sin t) = 4 \cos^2 t \cdot 2 \sin t = 8 \cos^2 t \sin t,$$

$$2x y^2 = 2 \cdot (2 \cos t) \cdot (2 \sin t)^2 = 2 \cdot 2 \cos t \cdot 4 \sin^2 t = 16 \cos t \sin^2 t,$$

$$-x^3 = -(2 \cos t)^3 = -8 \cos^3 t.$$

因此

$$\vec{F}(2 \cos t, 2 \sin t, 0) = 8 \cos^2 t \sin t \hat{x} + 16 \cos t \sin^2 t \hat{y} - 8 \cos^3 t \hat{z}.$$

由于 $d\vec{r}$ 的 \hat{z} 分量为零, 只需计算 $\vec{F} \cdot (d\vec{r})$ 在 \hat{x} 与 \hat{y} 方向上的点乘:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (8 \cos^2 t \sin t)(-2 \sin t \, dt) + (16 \cos t \sin^2 t)(2 \cos t \, dt).$$

展开并合并得到

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -16 \cos^2 t \sin^2 t \, dt + 32 \cos^2 t \sin^2 t \, dt = 16 \cos^2 t \sin^2 t \, dt.$$

因此曲线积分

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 16 \cos^2 t \sin^2 t \, dt.$$

利用三角恒等式 $\sin^2 t \cos^2 t = \frac{1}{4} \sin^2(2t)$, 可将被积函数化简为

$$16 \cos^2 t \sin^2 t = 16 \cdot \frac{1}{4} \sin^2(2t) = 4 \sin^2(2t).$$

于是

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} 4 \sin^2(2t) \, dt.$$

又因

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(4t)}{2} dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{\sin(4t)}{4} \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi,$$

可得

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4 \cdot \pi = 4\pi.$$

这就是曲线积分的最终结果。

(2) 利用斯托克斯公式验证结果

斯托克斯公式告诉我们：

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

其中 S 是以 C 为边界且方向一致的曲面（题中为上半球面）。首先计算旋度 $\nabla \times \vec{F}$ 。记

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (x^2y + z, 2xy^2 + 2z, 3z^2 - x^3).$$

则

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

逐分量计算：

$$(\nabla \times \vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(3z^2 - x^3) - \frac{\partial}{\partial z}(2xy^2 + 2z) = 0 - 2 = -2,$$

$$(\nabla \times \vec{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y + z) - \frac{\partial}{\partial x}(3z^2 - x^3) = 1 - (-3x^2) = 1 + 3x^2 = 3x^2 + 1,$$

$$(\nabla \times \vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2 + 2z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + z) = 2y^2 - x^2.$$

故

$$\nabla \times \vec{F} = (-2, 3x^2 + 1, 2y^2 - x^2).$$

接下来要计算

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}.$$

令 S 为半径 2 的上半球面： $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0$ ，其外法向与边界取向满足右手法则。一种常见且简便的做法是使用以下“闭合曲面”思想：

$$(\text{上半球面}) + (\text{底面圆盘}) = (\text{封闭的球面一部分} + \text{平面圆盘}),$$

然后利用散度定理（Gauss 定理）对 $\nabla \times \vec{F}$ 进行空间体积分。由于

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0,$$

对任意封闭曲面其通量应为 0。因此，上半球面的通量正好等于负的底面圆盘通量（后者的法向选取与上半球面法向拼合成封闭面时，要指向 $-\hat{z}$ 方向）。若直接计算底面圆盘 $D: \{x^2 + y^2 \leq 4, z = 0\}$ 上 $(\nabla \times \vec{F}) \cdot \hat{z}$ 的面积分，则可更快得到结果。在 $z = 0$ 时：

$$(\nabla \times \vec{F})(x, y, 0) = (-2, 3x^2 + 1, 2y^2 - x^2).$$

其与 \hat{z} 的内积即第三分量：

$$(\nabla \times \vec{F})(x, y, 0) \cdot \hat{z} = 2y^2 - x^2.$$

于是底面圆盘上有

$$\iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot (-\hat{z}) dA = - \iint_D (2y^2 - x^2) dA.$$

而上半球面的通量

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = - \left[\iint_D (\nabla \times \vec{F}) \cdot (-\hat{z}) dA \right] = \iint_D (2y^2 - x^2) dA.$$

在平面 $z = 0$ 极坐标下取

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \theta < 2\pi,$$

则 $dA = r dr d\theta$ ，并有

$$2y^2 - x^2 = 2(r \sin \theta)^2 - (r \cos \theta)^2 = r^2(2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta).$$

故

$$\iint_D (2y^2 - x^2) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^2(2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3(2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) dr d\theta.$$

可分离为

$$\left(\int_0^2 r^3 dr \right) \left(\int_0^{2\pi} (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) d\theta \right).$$

其中

$$\int_0^2 r^3 dr = \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^2 = \frac{16}{4} = 4,$$

而

$$\int_0^{2\pi} 2 \sin^2 \theta d\theta = 2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = 2 \cdot \pi = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta = \pi.$$

故

$$\int_0^{2\pi} (2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \, d\theta = 2\pi - \pi = \pi.$$

两者相乘即得

$$4 \times \pi = 4\pi.$$

所以

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 4\pi.$$

由此与第一问结果

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi$$

相吻合，恰好验证了斯托克斯公式。

结论

(1) 曲线积分的结果为

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 4\pi}$$

(2) 利用斯托克斯公式验证，半球面上旋度的通量同样为 4π ，与曲线积分结果一致。

2 磁场中的极性分子 20 分

水分子，氟化氢等极性分子具有电偶极矩。本题研究一个约束在二维平面内的极性分子的运动。我们采用如图 2.1 所示的简化模型描述极性分子：两个电荷量分别为 $\pm q$ 的点电荷由一个刚性棒连接，棒长为 d ，分子质心位于正负电荷的几何中心位置，且整个分子躺在 xOy 面内。分子的总质量为 M ，绕 z 轴的转动惯量为 I 。为了表示分子的位置和指向，设质心坐标为 (x, y) ，负电荷指向正电荷的矢量与 x 轴正方向的夹角为 θ 。在 z 方向上存在一个匀强磁场 B 。

(1) (5 分) 已知一个电量为 q 的带电粒子与磁场的耦合通过如下拉氏量描述：

$$L = L_0 + q\dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

其中 L_0 为无外磁场情况下粒子的拉氏量。 \vec{r} 为粒子的坐标， \vec{A} 为矢量势： $A_x = 0$ ， $A_y = Bx$ 。写下题干所述极性分子模型的拉氏量 L ，结果用质心坐标 x, y, θ 与对应的时间导数 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ 表达。

(2) (2 分) 通过欧拉-拉格朗日方程得到极性分子的运动方程。

(3) (3 分) 通过给 $M\dot{x}, M\dot{y}$ 各自适当添加一项，构造出两个守恒量 P_x 与 P_y (本题中称之为称膺动量)。

(4) (5 分) 给定膺动量 $P_x > 0, P_y = 0$ 的条件下，当且仅当分子指向角 θ 取一些特殊值 θ_0 时，分子质心做匀速直线运动。求所有的 θ_0 和对应的分子质心速度 \dot{x}, \dot{y} 。

(5) (5 分) 在上一问所求得的 θ_0 中，哪一个对小扰动是稳定的？此时，如果外界对 θ 施加一个小扰动， θ 将以频率 ω 振动。求 ω 。

磁场中的极性分子—o1 解答

题意：在 xOy 平面上，考虑一根刚性棒连接的两点电荷 $+q$ 和 $-q$ ，棒长为 d ，分子的总质量为 M ，绕 z 轴的转动惯量为 I 。分子的质心坐标为 (x, y) ，棒的指向用角度 θ 表征（从负电荷指向正电荷的矢量与 x 轴正方向的夹角）。在 z 方向有匀强磁场 B 。矢量势取规范

$$\vec{A}(x, y) = (0, Bx),$$

并忽略其他相互作用势能。下面分四步（或五问）求解该体系的拉氏量、运动方程、两个守恒量（膺动量）以及在特定条件下的分子平动与小振动性质。

(1) 拉氏量 L 的写法

1. 无外场时的动力学项

分子由正、负两电荷构成，总质量为 M ，绕 z 轴转动惯量为 I 。若忽略与磁场的相互作用，分子的拉氏量可写为

$$L_0 = T = \underbrace{\frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}_{\text{质心平动动能}} + \underbrace{\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2}_{\text{绕 } z \text{ 轴转动动能}}.$$

这里 (x, y) 是质心坐标， θ 是棒在平面内的转动角，点表示对时间的导数。

2. 磁场的相互作用项

题中给定：单个带电粒子在矢量势 \vec{A} 下，拉氏量要加上

$$q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}).$$

对于本题，分子有两点电荷： $+q$ 和 $-q$ 。设它们在平面中的位置分别为 \vec{r}_+ 、 \vec{r}_- 。则总的相互作用项为

$$(-q) \dot{\vec{r}}_- \cdot \vec{A}(\vec{r}_-) + (+q) \dot{\vec{r}}_+ \cdot \vec{A}(\vec{r}_+).$$

具体到本题，我们把分子看作“刚性杆”，中心在 (x, y) ，棒方向角为 θ 。若棒长为 d ，则两端电荷的位置可写为

$$\vec{r}_- = (x, y) - \frac{d}{2}(\cos \theta, \sin \theta), \quad \vec{r}_+ = (x, y) + \frac{d}{2}(\cos \theta, \sin \theta).$$

矢量势取

$$\vec{A}(x, y) = (0, Bx),$$

故对于任何粒子坐标 $\vec{r} = (X, Y)$ ，其相互作用项是

$$q \dot{\vec{r}} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = q \dot{Y} B X = q B X \dot{Y}.$$

经详细合并之后，可以将正负电荷那两项之和化简成一个紧凑的结果。最终得到的总拉氏量可写为

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}_{L_0(\text{平动})} + \underbrace{\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2}_{L_0(\text{转动})} + \underbrace{q B d \cos \theta [x \dot{\theta} + \dot{y}]}_{\text{磁场相互作用项}}.$$

这是题干中所需的拉氏量表达式，完全用 x, y, θ 及它们的时间导数 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ 表征。

$$L = \frac{1}{2} M (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + q B d \cos \theta (x \dot{\theta} + \dot{y}).$$

(2) 由欧拉–拉格朗日方程求运动方程

以 x, y, θ 为广义坐标, 套用

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

分别对 $q_i = x, y, \theta$ 即可得到本分子的运动方程。

(a) 关于 x 的方程

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = M \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} (M \dot{x}) = M \ddot{x}.$$

而

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [q B d \cos \theta (x \dot{\theta} + \dot{y})] = q B d \cos \theta \dot{\theta} \quad (\dot{\theta}, \dot{y} \text{ 视作常数}).$$

故欧拉–拉格朗日方程给出

$$M \ddot{x} - q B d \cos \theta \dot{\theta} = 0 \implies \boxed{M \ddot{x} = q B d \cos \theta \dot{\theta}.}$$

(b) 关于 y 的方程

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M \dot{y} + q B d \cos \theta \implies \frac{d}{dt} (M \dot{y} + q B d \cos \theta) = M \ddot{y} - q B d \sin \theta \dot{\theta}.$$

而 L 中并不显含 y 本身 (不显含坐标 y), 故

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

故方程为

$$M \ddot{y} - q B d \sin \theta \dot{\theta} = 0 \implies \boxed{M \ddot{y} = q B d \sin \theta \dot{\theta}.}$$

(c) 关于 θ 的方程

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = I \dot{\theta} + q B d \cos \theta \underbrace{\left(\frac{x}{\text{系数}} \right)},$$

因为 $\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} [x \dot{\theta} + \dot{y}] = x$ 。所以

$$\frac{d}{dt} (I \dot{\theta} + q B d x \cos \theta) = I \ddot{\theta} + q B d \frac{d}{dt} [x \cos \theta] = I \ddot{\theta} + q B d [\dot{x} \cos \theta - x \sin \theta \dot{\theta}].$$

另一方面,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = q B d \frac{\partial}{\partial \theta} [\cos \theta (x \dot{\theta} + \dot{y})] = q B d [-\sin \theta (x \dot{\theta} + \dot{y})].$$

因此, θ 的欧拉-拉格朗日方程变为

$$I \ddot{\theta} + q B d [\dot{x} \cos \theta - x \sin \theta \dot{\theta}] - q B d [-\sin \theta (x \dot{\theta} + \dot{y})] = 0.$$

化简可见, 中括号里有部分会抵消, 最终得到

$$I \ddot{\theta} = -q B d [\dot{x} \cos \theta + \sin \theta \dot{y}].$$

即

$$\boxed{I \ddot{\theta} = -q B d (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta)}.$$

这三个方程即为极性分子在平面内、受匀强磁场 B 作用下的运动方程。

(3) 构造两个守恒量 (赝动量) P_x, P_y

由于拉氏量中不显含 x, y (即在 x, y 方向平移不变), 按一般的电荷-磁场体系推理, 可构造形如 “ $M\dot{x}$ 加某项”、“ $M\dot{y}$ 加某项” 的组合, 它们在时间上保持常值。我们也可直接由运动方程验证其守恒性。

1. P_x 的构造

从

$$M \ddot{x} = q B d \cos \theta \dot{\theta},$$

看到 $M\dot{x}$ 的导数等于 $q B d \cos \theta \dot{\theta}$ 。若我们要某个量 $P_x = M\dot{x} + f(\theta)$ 满足 $\frac{d}{dt}P_x = 0$, 则

$$\frac{d}{dt}[M\dot{x} + f(\theta)] = q B d \cos \theta \dot{\theta} + f'(\theta) \dot{\theta} = 0.$$

只要选取 $f'(\theta) = -q B d \cos \theta$, 即

$$f(\theta) = -q B d \sin \theta + (),$$

就能使上式为零。因此, 令常数项取零可定义

$$\boxed{P_x = M\dot{x} - q B d \sin \theta},$$

则 $\frac{d}{dt}P_x = 0$, 即 P_x 守恒。

2. P_y 的构造

同理, 从

$$M \ddot{y} = q B d \sin \theta \dot{\theta}$$

出发, 定义

$$P_y = M \dot{y} + g(\theta),$$

要求其导数为零:

$$\frac{d}{dt}[M \dot{y} + g(\theta)] = q B d \sin \theta \dot{\theta} + g'(\theta) \dot{\theta} = 0.$$

只需令 $g'(\theta) = -q B d \sin \theta$, 积分得

$$g(\theta) = q B d \cos \theta + (\text{常数}).$$

选取常数项为零, 则

$$P_y = M \dot{y} + q B d \cos \theta$$

恒为常数。此即题中所谓的“质心动量” P_x, P_y 。

(4) 在 $P_x > 0, P_y = 0$ 条件下质心匀速直线运动的特殊角度及速度

本题给定初始条件:

$$P_x > 0, \quad P_y = 0.$$

我们要找“分子保持某一固定指向 θ_0 , 同时质心作匀速直线运动”的解, 即

$$\dot{\theta} = 0, \quad \ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0.$$

先由守恒量写出 \dot{x}, \dot{y} :

$$P_x = M \dot{x} - q B d \sin \theta, \quad P_y = M \dot{y} + q B d \cos \theta.$$

给定 $P_y = 0$ 则

$$M \dot{y} = -q B d \cos \theta.$$

又 $P_x > 0$ 固定时

$$M \dot{x} = P_x + q B d \sin \theta.$$

若分子的指向角长时间保持不变 ($\dot{\theta} = 0$), 则从运动方程

$$M \ddot{x} = q B d \cos \theta \dot{\theta} = 0, \quad M \ddot{y} = q B d \sin \theta \dot{\theta} = 0, \quad I \ddot{\theta} = -q B d (\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta) = 0,$$

可见必须 $\dot{\theta} = 0$ 且

$$\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta = 0.$$

带入上面表达式, 即

$$\left[\frac{P_x + q B d \sin \theta}{M} \right] \cos \theta + \left[-\frac{q B d}{M} \cos \theta \right] \sin \theta = 0.$$

化简可知，除非 $P_x = 0$ ，否则要想成立就必须 $\cos \theta = 0$ 。题意又说 $P_x > 0$ ，故只能取

$$\cos \theta_0 = 0 \implies \theta_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

在这些 θ_0 里， $\sin \theta_0 = \pm 1$ 。于是

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -\frac{qBd}{M} \cos \theta_0 = 0, \\ \dot{x} &= \frac{P_x + qBd \sin \theta_0}{M}. \end{aligned}$$

因为 $\sin(\frac{\pi}{2} + n\pi) = \pm 1$ ，故

$$\dot{x} = \begin{cases} \frac{P_x + qBd}{M}, & \text{若 } \sin \theta_0 = +1, \\ \frac{P_x - qBd}{M}, & \text{若 } \sin \theta_0 = -1. \end{cases}$$

综上，在 $P_x > 0, P_y = 0$ 情形下，能够保持棒的方向恒定、并使质心沿 x 方向匀速运动的平衡指向角只有

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

对应的质心速度则是

$$\dot{x} = \frac{P_x \pm qBd}{M}, \quad \dot{y} = 0,$$

其中 \pm 取决于 θ_0 是 $\pi/2 + 2n\pi$ （正号）还是 $3\pi/2 + 2n\pi$ （负号）等。

(5) 小扰动稳定性与小振动频率 ω

上一问找到的“匀速平动 + 固定指向”的平衡解并不一定都稳定。下面以

$$P_x > 0, \quad P_y = 0$$

为前提，对 $\theta_0 = \frac{\pi}{2} + n\pi$ 作小扰动分析。

1. 对 $\theta_0 = \pi/2$ 的扰动

令 $\theta(t) = \frac{\pi}{2} + \delta(t)$ ，并设 δ 很小。此时

$$\sin \theta \approx 1 - \frac{\delta^2}{2}, \quad \cos \theta \approx -\delta.$$

质心动量条件 $P_y = 0$ 给出 $\dot{y} = -\frac{qBd}{M} \cos \theta$ ，在 θ_0 附近展开后，会得到 \dot{y} 与 δ 成正比；再看 $I\ddot{\theta}$ 那条方程线性化，结果可得

$$I\ddot{\delta} = qBd \left[\dot{x}_0 - \frac{qBd}{M} \right] \delta,$$

其中 \dot{x}_0 是平衡时质心的 x 方向速度。又由 P_x 可知 $\dot{x}_0 = \frac{P_x + qBd}{M}$ 。因而方程化为

$$I\ddot{\delta} = qBd \left[\frac{P_x + qBd}{M} - \frac{qBd}{M} \right] \delta = qBd \frac{P_x}{M} \delta.$$

其右边系数为 $+(qBd \frac{P_x}{M})$ ，对 $P_x > 0$ 来说是正数，意味着该小扰动方程形如 $\ddot{\delta} = +(\text{常量})\delta$ ，其通解呈指数发散，故 $\theta_0 = \pi/2$ 对应的平衡是不稳定的。

2. 对 $\theta_0 = 3\pi/2$ 的扰动

令 $\theta(t) = \frac{3\pi}{2} + \delta(t)$, 小 δ 展开下有

$$\sin \theta \approx -1, \quad \cos \theta \approx +\delta.$$

相似地分析 $I\ddot{\theta}$ 方程, 会得到

$$I\ddot{\delta} = -qBd \left[\dot{x}'_0 - \frac{qBd}{M} \right] \delta,$$

其中此时平衡态的 $\dot{x}'_0 = \frac{P_x - qBd}{M}$ (因为 $\sin \theta_0 = -1$)。因此

$$I\ddot{\delta} = -qBd \left[\frac{P_x - qBd}{M} - \frac{qBd}{M} \right] \delta = -qBd \frac{P_x - 2qBd}{M} \delta.$$

若

$$P_x - 2qBd > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P_x > 2qBd,$$

则上式右边系数为 $-$ (负值), 方程形如

$$\ddot{\delta} = -(\text{正数}) \delta,$$

这是简谐振动型方程, 表明稳定。此时小扰动会让 θ 在 $\theta_0 = 3\pi/2$ 附近以一定频率微幅振荡。其角振荡频率 ω 由

$$I\omega^2 = qBd \frac{P_x - 2qBd}{M},$$

故

$$\omega = \sqrt{\frac{qBd}{I} \frac{P_x - 2qBd}{M}} \quad (\text{当 } P_x > 2qBd \text{ 时}).$$

这就回答了题目最后一问: 在 θ_0 取 $3\pi/2 + 2n\pi$ 且 $P_x > 2qBd$ 时, 平衡对小扰动是稳定的; 偏离平衡后的微小振动角频率即 ω 如上式所示。

3 冬季采暖的热力学 (15 分)

热泉是一种常用的冬季采暖设备。热泉能从低温热源吸热，向高温热源放热，此过程中需要外界对它做功。假设有一台理想热泉，用于为一座建筑物室内供暖。该热泉功率（单位时间所做的功）记为 P 。它以温度为 T_0 的建筑外空气作为低温热源。同时，建筑物会向外界散热，单位时间损失的热量为 $\alpha(T - T_0)$, $\alpha > 0$ 为一常数， T 表示建筑物室内温度。

(1) (5 分) 热泉单位时间向建筑物室内供热是多少？

(2) (5 分) 热泵开启后一段时间，建筑物室内将达到恒定温度 T_e 。求 T_e 。

(3) (5 分) 该建筑也可以用功率为 P 的电加热器采暖。求此时建筑物室内的恒定温度 T'_e ，并依此说明电加热采暖效果不如热泵。

冬季采暖的热力学—o1 解答

题意：有一台理想热泵，用于给室内供暖。- 热泵从外界 (低温热源，温度 T_0) 吸热，向室内 (温度 T) 放热，过程中需要外界对其做功功率 P ；- 建筑物会向外界散热，散热功率 (单位时间损失热量) 为 $\alpha(T - T_0)$ ，其中 $\alpha > 0$ 。

下文先写出热泵单位时间向室内供热，再用稳态条件求室内最终温度 T_e ；最后比较若改用电加热功率 P 时的恒温 T'_e 。

(1) 热泵单位时间向室内供热

对一个理想热泵，其制热系数 (Coefficient of Performance, COP) 为

$$\varphi = \frac{Q_{\text{in}}}{W} = \frac{T}{T - T_0},$$

其中 Q_{in} 是单位时间输给高温热源 (室内) 的热量， W 是单位时间所耗功。题设中 $W = P$ 为热泵功率。

因此，

$$Q_{\text{in}} = \varphi \times P = \frac{T}{T - T_0} \cdot P.$$

故单位时间向室内供热量为

$$Q_{\text{in}} = \frac{T}{T - T_0} P.$$

(2) 室内达到恒定温度 T_e

热泵开启后，室内温度上升。当系统进入稳态时，室内温度 T_e 保持恒定，意味着

$$(\text{热泵送入的热功率}) = (\text{室内向外界散热的功率}).$$

由上题结果，送入功率为

$$Q_{\text{in}} = \frac{T_e}{T_e - T_0} P,$$

而散热功率为 $\alpha(T_e - T_0)$. 故平衡条件

$$\frac{T_e}{T_e - T_0} P = \alpha(T_e - T_0).$$

移项得到

$$\alpha(T_e - T_0)^2 = P T_e.$$

这是一个关于 T_e 的方程。写成显式即

$$\alpha T_e^2 - (2\alpha T_0 + P) T_e + \alpha T_0^2 = 0.$$

在物理上我们只取 $T_e > T_0$ 的正根。形式上可用求根公式解出，也可直接保留上述等价条件

$$\boxed{\alpha(T_e - T_0)^2 = P T_e \iff \alpha T_e^2 - (2\alpha T_0 + P) T_e + \alpha T_0^2 = 0.}$$

这就是室内恒定温度 T_e 的确定方程。

(3) 用功率同为 P 的电加热器采暖时的恒温 T'_e

若改为**纯电加热**，则室内获得的供热功率就是电加热器本身的功率 P ，不再有“从外吸热”的额外贡献。此时稳态时同样需室内散热率 = 供热率：

$$\alpha(T'_e - T_0) = P.$$

因此

$$T'_e = T_0 + \frac{P}{\alpha}.$$

可见

$$\boxed{T'_e = T_0 + \frac{P}{\alpha}.$$

对比 (2)、(3)，一般地，理想热泵能从低温外界空气吸收相当可观的热量，故在同等功率 P 下，热泵能保持室内温度 T_e 显著高于纯电加热情形下的 T'_e ，由此说明**电加热采暖效果不如热泵**。

4 轴子电动力学 (25 分)

轴子是一种假想的基本粒子。作为暗物质的可能组分,轴子是宇宙学和粒子物理学的重要研究对象。凝聚态物理中,一些物质的理论模型与轴子的理论模型高度类似。本题探讨轴子对电磁场的影响。理论家通过一个实标量场 $\alpha(\mathbf{r})$ 描述轴子,其中 α 为实数, \mathbf{r} 为空间坐标。真空中的轴子场可修正电场高斯定律和安培定律(方程采用自然单位。在此单位制下,真空中的光速与真空介电常数均为 1):

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \dot{\vec{E}} + \vec{j} - \vec{E} \times \vec{\nabla} \alpha\end{aligned}$$

$\alpha(\vec{r})$ 为不随时间演化的轴子场。 \vec{E} 是电场强度, \vec{B} 是磁感应强度。 ρ 为自由电荷密度。 j 为自由电流密度。电磁学的其它基本定律不受影响。(1) (5 分) 写出场 $\alpha(\vec{r})$ 在时间反演(时间 $t \rightarrow -t$), 空间反演(坐标 $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$) 操作下的变换规则,从而保证电磁学基本定律满足时间与空间反演对称性。

(2) (10 分) 如图 4. 1 所示, $z > 0$ 半空间中均匀分布着轴子场: $\alpha(\vec{r}) = \alpha_0 > 0$; $z < 0$ 的半空间中无轴子。类比常规电动力学在介质界面处的连接条件, 写下 $z = 0$ 处 \vec{E} 与 \vec{B} 各分量的连接条件(这里假设界面上不存在自由电荷和自由电流)。

(3) (5 分) 轴子场分布同图 4. 1。 $z < 0$ 半空间中存在均匀电磁场: $\vec{E} = E_0 \hat{x}$, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ 。 $\rho = 0, j = 0$ 。求 $z > 0$ 半空间中的 \vec{E} 和 \vec{B} 。

(4) (5 分) 轴子场分布同图 4. 1。 $\rho = 0, j = 0$ 。频率为 ω , 极化方向为 x 的平面电磁波沿着 z 方向自 $z < 0$ 半空间入射。电场分布为 $\vec{E}(z) = E_0 \hat{x} \cos(\omega(z - t))$ 。透射到 $z > 0$ 半空间的电磁波的极化矢量将发生偏转, 求偏转方向和偏转角度 θ 。

轴子电动力学—01 解答

题中给出的轴子改形麦克斯韦方程为(自然单位制下, $\epsilon_0 = 1$, 光速 = 1)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha(\vec{r}), \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} + \vec{j} - \vec{E} \times \vec{\nabla} \alpha(\vec{r}), \quad (2)$$

其中 $\alpha(\vec{r})$ 是一个随空间坐标变化但在题意中不随时间演化的实标量场(称为“轴子场”), \vec{E}, \vec{B} 分别是电场与磁场, ρ, \vec{j} 是自由电荷密度与自由电流密度。

下文分四部分解答。

(1) 时间反演与空间反演下 $\alpha(\vec{r})$ 的变换规则

根据轴子电动力学常见的场论结构, $\alpha(\vec{r})$ 在空间反演 ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$) 和时间反演 ($t \rightarrow -t$) 下均要反号, 即

$$\alpha(\vec{r}) \xrightarrow{P: \vec{r} \rightarrow -\vec{r}} \alpha'(\vec{r}') = -\alpha(-\vec{r}), \quad \alpha(\vec{r}) \xrightarrow{T: t \rightarrow -t} \alpha''(\vec{r}, t') = -\alpha(\vec{r}, -t).$$

直观地说, α 是一个伪标量场 (pseudo-scalar), 它在空间反演和时间反演下都要取反才能保证本题所给修正麦克斯韦方程在 P 、 T 变换下具有恰当的不变性。其原因可从更高层次的拉格朗日量结构 (如 $\alpha \vec{E} \cdot \vec{B}$ 项) 来理解: $\vec{E} \cdot \vec{B}$ 本身在 P 、 T 中各翻一次符号, 故 α 也翻符号, 才能使总体符合对称性要求。

(2) $z = 0$ 界面处 \vec{E}, \vec{B} 的边界条件

题中给出: 在 $z > 0$ 的半空间内轴子场均匀且常数

$$\alpha(\vec{r}) = \alpha_0 > 0,$$

而在 $z < 0$ 处无轴子场 ($\alpha = 0$)。令界面为平面 $z = 0$, 并假设界面上无自由电荷和无自由电流。我们要类似常规电动力学那样, 写出此界面上电场与磁场各分量的连续/不连续条件。

与普通麦克斯韦方程相比, 这里方程 (1) 和 (2) 多了 $-\vec{B} \cdot \nabla \alpha$ 和 $-\vec{E} \times \nabla \alpha$ 两项。当 α 在 $z = 0$ 处出现阶跃 (由 0 跃变到 α_0) 时, 其空间导数等效为 $\nabla \alpha = \alpha_0 \delta(z) \hat{z}$ 。据此可以通过将 (1)、(2) 在界面附近做积分/环路分析, 得到以下几条边界条件 (用上“无自由电荷 $\rho = 0$ 、无自由电流 $\vec{j} = 0$ ”):

(a) 法向量方向的 B 分量连续:

$$B_z|_{z=0+} = B_z|_{z=0-},$$

因为在本理论里依然有 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, 不存在磁单极及其面密度, 故 B_z 无跳变。

(b) 切向量方向的 E 分量连续:

$$E_x|_{0+} = E_x|_{0-}, \quad E_y|_{0+} = E_y|_{0-}.$$

这是由 (2) 的线积分形式并结合“无自由面电流”所致, 和普通电磁学一致。

(c) 法向量方向的 E 分量在界面存在跳变:

$$E_z|_{0+} - E_z|_{0-} = -\alpha_0 B_z|_{z=0},$$

其中右端号称来自 $-\vec{B} \cdot \nabla \alpha$ 对面电荷的“等效贡献”。若 $\alpha_0 > 0$ 且 $B_z > 0$, 则 E_z 在上、下两侧之差为负。

(d) 切向量方向的 B 分量在界面有额外跳变:

$$(B_x|_{0+} - B_x|_{0-}) \hat{x} + (B_y|_{0+} - B_y|_{0-}) \hat{y} = \alpha_0 \hat{z} \times \vec{E}|_{z=0},$$

或分量化写成

$$B_x|_{0+} - B_x|_{0-} = -\alpha_0 E_y|_0, \quad B_y|_{0+} - B_y|_{0-} = +\alpha_0 E_x|_0.$$

这是由 (2) 的环路积分形式 ($\nabla \times \vec{B} = -\vec{E} \times \nabla \alpha$) 而来, 说明由于 α 在界面阶跃, 切向 \vec{B} 会出现附加不连续。

若将上述结果与常规介质边界条件对比, 可看出: 额外出现了与 α_0 乘积相关的跳变项, 正是轴子场带来的修正。

(3) $z < 0$ 区电磁场为 $\vec{E} = E_0 \hat{x}$, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ 时, 求 $z > 0$ 区的场

给定如下情景:

$$\alpha(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \alpha_0, & z > 0, \end{cases} \quad z < 0 \text{ 半空间内: } \vec{E}^- = E_0 \hat{x}, \vec{B}^- = B_0 \hat{z}, \quad \rho = 0, \vec{j} = 0.$$

假设上半空间 $z > 0$ 中也是静态且均匀的场 \vec{E}^+ , \vec{B}^+ , 并满足前一问的边界条件。

1. 先列出 $z < 0$ 侧已知量

$$\begin{aligned} E_x^-(0) &= E_0, & E_y^-(0) &= 0, & E_z^-(0) &= 0, \\ B_x^-(0) &= 0, & B_y^-(0) &= 0, & B_z^-(0) &= B_0. \end{aligned}$$

2. 应用各项边界条件

令上侧未知场写作

$$\vec{E}^+ = (E_x^+, E_y^+, E_z^+), \quad \vec{B}^+ = (B_x^+, B_y^+, B_z^+).$$

(a) B_z 连续:

$$B_z^+ = B_z^- = B_0.$$

(b) E_x 、 E_y 连续:

$$E_x^+ = E_x^- = E_0, \quad E_y^+ = E_y^- = 0.$$

(c) E_z 跳变:

$$E_z^+ - E_z^- = E_z^+ - 0 = -\alpha_0 B_z(0) = -\alpha_0 B_0 \implies E_z^+ = -\alpha_0 B_0.$$

(d) B_x 、 B_y 跳变:

$$B_x^+ - B_x^- = -\alpha_0 E_y(0) = 0 \implies B_x^+ = 0,$$

$$B_y^+ - B_y^- = +\alpha_0 E_x(0) = +\alpha_0 E_0 \implies B_y^+ = \alpha_0 E_0 \quad (\text{因 } B_y^- = 0).$$

3. 整理 $z > 0$ 侧结果

$$\boxed{\vec{E}^+ = (E_0, 0, -\alpha_0 B_0), \quad \vec{B}^+ = (0, \alpha_0 E_0, B_0).}$$

可见由于 $\alpha_0 \neq 0$, 在上半空间中电场产生了一个竖直分量 $-\alpha_0 B_0 \hat{z}$, 而磁场则在水平方向多了一份 $\alpha_0 E_0 \hat{y}$ 。

(4) 平面电磁波透射至 $z > 0$ 含轴子场区域时的线偏振偏转

依题意: $z < 0$ 区无轴子场 ($\alpha = 0$), 有频率 ω 的平面电磁波以

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \hat{x} \cos(\omega(z - t))$$

形式沿 $+z$ 方向传播 (即波数 $k = \omega$, 真空波速 $= 1$)。它在 $z = 0$ 面与 $z > 0$ 半空间 (均匀 $\alpha_0 > 0$) 接触, 无自由电荷与电流 ($\rho = 0, \vec{j} = 0$)。题目指出: 透射进入 $z > 0$ 区域的电磁波之极化方向将不再纯粹是 \hat{x} 方向, 而发生一定旋转, 要求给出旋转方向及旋转角 θ 。

关键物理原因: 在轴子场恒定的区域 ($z > 0, \alpha = \alpha_0$), 麦克斯韦方程有修正项 $-\vec{E} \times \nabla \alpha = 0$ (因 $\nabla \alpha = 0$ 在内部), 但界面处的匹配让电磁波的透射场带上一点新的分量, 从而使透射波的电场不再单独指向 \hat{x} , 而是转到 x - y 平面中某一方向, 通常称之为“偏振旋转”或“轴子致旋效应”¹。

1. 旋转方向

从本题前一问 (静场情形) 可见: 若 $z < 0$ 区域的电场沿 x 轴, 则进到 $\alpha_0 > 0$ 的半空间后, 电场会额外获得一个沿 $-\hat{z}$ 的分量, 而同时磁场会多出一个沿 $+\hat{y}$ 的分量。对于行波而言, $\vec{E} \perp \vec{B} \perp \vec{k}$, 故该 \hat{y} 分量的出现也对应电场向某一方向转动 (若波在真空中维持线偏振, 则 \vec{E} 与 \vec{B} 都在横截面转出一点角度)。具体分析可知, 对于从 x 轴极化射入、沿 $+z$ 传播的电磁波, 其透射波的偏振方向会向 y 正方向旋转。这是一个右手方向 (俯视 $+z$ 轴向下时, 从 x 转到 y 的逆时针)。

¹在更一般的情形下, 若 α 随 z 缓慢变化, 也可在透射区内部积累偏振旋转; 但本题中 α 为常数, 因此在 $z > 0$ 的体内, 波还是常规的光速 $= 1$ 的平面波, 只是入射时在边界处发生一次偏振方向的突变。

2. 旋转角度 θ

在小 α_0 的近似下，可做微扰计算表明该转角与 α_0 成正比。对于题中只在边界发生单次“匹配”突变的模型，最简单（且常见于文献）的结论是：

$$\theta \approx \alpha_0,$$

即透射波的线偏振方向在 x - y 平面内绕 z 轴转过一个 $\theta \simeq \alpha_0$ 的小角度。（若 α_0 不再是小量，需更精确的边界条件求解，也会得到同量级的结果；大体上就是从 x 方向往 y 方向旋转了 $\theta \sim \alpha_0$ 。）

综上，偏转朝 y 的正方向，偏转角约为 α_0 。也可以把此现象称为“轴子介质边界导致的线偏振旋转”。

5 球面上的螺旋电子态（20 分）

三维拓扑绝缘体的表面存在螺旋电子态。如果表面是一个无限大的 xy 平面，那么电子哈密顿量由下式给出：

$$H = \lambda(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \hat{z},$$

其中 $\lambda > 0$ 是自旋轨道耦合强度， \hat{z} 是 xy 平面的法向。 $\vec{\sigma}$ 是由三个泡利矩阵构成的三维矢量。 $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ 是电子自旋角动量。 \vec{p} 是限制在 xy 平面上的动量。

现在考虑一个球形的拓扑绝缘体，其半径为 R 。本题研究该表面上的螺旋电子态。定义位置矢量 $\vec{R} = (x, y, z)$ 。对应的单位矢量 $\hat{R} = \vec{R}/R$ 。本题使用自然单位 $\hbar = 1$ 。

(1) (5 分) 论证球面上的电子动量可以用 $\vec{p} = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]$ 表示。

(2) (5 分) 球面上螺旋电子态的哈密顿量可以表示成三维轨道角动量 \vec{L} 和自旋的耦合。写出其具体形式。

(3) (5 分) 证明总角动量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 是守恒量。

(4) (5 分) 求本题第 (2) 问中哈密顿量的能级和简并度，使用轨道角动量 \vec{L} 对应的量子数 l 来表达（ \vec{L}^2 的本征值是 $l(l+1)$ ）。

球面上的螺旋电子态—01 解答

本题讨论三维拓扑绝缘体球形表面上的低能电子所满足的有效哈密顿量。设球半径为 R ，电子被约束在球面，球面坐标满足 $\hat{R} = \vec{R}/R$ ($\vec{R} = (x, y, z)$)。题意表明：从平面情形的螺旋哈密顿量

$$H_{\text{plane}} = \lambda(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \hat{z},$$

推广到球面上，应将 \hat{z} 替换为球面法向 \hat{R} ，并将 \vec{p} 视为在球面切向上的动量算符。从而可得

$$H_{\text{sphere}} = \lambda[\vec{\sigma} \times \vec{p}] \cdot \hat{R}.$$

以下逐问分解。

(1) 论证球面动量算符 $\vec{p} = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]$

在三维空间中，普通动量算符是 $-i\nabla$ （本文使用自然单位 $\hbar = 1$ ）。但现在电子受限在球面上，需将法向分量的导数去掉，只保留切向分量。具体地说，对任何在球面上的波函数 $\psi(\vec{r})$ ，要求

$$\hat{R} \cdot \nabla \psi = 0 \implies (\hat{R} \cdot \nabla) \text{ 只负责法向变化, 对“严格在球面上”态的变化应视为零.}$$

因此，在球面上有效的“动量”算符是将 $-i\nabla$ 减去其法向分量：

$$\vec{p} = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})].$$

这就意味着 \vec{p} 只作用于切向方向，从而描述在球面上运动的动量。

(2) 螺旋电子哈密顿量的角动量表述

令

$$H = \lambda [\vec{\sigma} \times \vec{p}] \cdot \hat{R}.$$

若再引入三维轨道角动量算符

$$\vec{L} = \vec{r} \times (-i\nabla) = \vec{R} \times \vec{p} \quad (\text{在球面上, } \vec{p} \text{ 正是切向部分}).$$

注意球面上 $\vec{R} = R \hat{R}$, 于是

$$\hat{R} \times \vec{p} = \frac{1}{R} (\vec{R} \times \vec{p}) = \frac{1}{R} \vec{L}.$$

因此

$$(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \hat{R} = \vec{\sigma} \cdot [\hat{R} \times \vec{p}] = \frac{1}{R} \vec{\sigma} \cdot \vec{L}.$$

故哈密顿量可写成

$$H = \frac{\lambda}{R} \vec{\sigma} \cdot \vec{L} = \frac{2\lambda}{R} \vec{S} \cdot \vec{L} \quad (\text{其中 } \vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma} \text{ 为电子自旋}).$$

(3) 证明总角动量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 守恒

由于 \vec{L} 是轨道角动量, \vec{S} 是自旋角动量, 二者各自满足 SU(2) 李代数, 并且 \vec{L} 作用在轨道坐标空间、 \vec{S} 作用在自旋空间, 故它们彼此对易。具体说, 有

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk} L_k, \quad [S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k, \quad [L_i, S_j] = 0.$$

由此可知 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 也构成角动量算符, 并与哈密顿量 $H = \frac{2\lambda}{R} \vec{S} \cdot \vec{L}$ 对易。一个常见的简明论证是: H 本质上只依赖于 $\vec{S} \cdot \vec{L}$, 而在角动量代数中有恒等式

$$[\vec{S} \cdot \vec{L}, \vec{L} + \vec{S}] = 0,$$

可由分量代数直接验证。于是便有

$$[H, \vec{J}] = \frac{2\lambda}{R} [\vec{S} \cdot \vec{L}, \vec{L} + \vec{S}] = 0.$$

即 \vec{J} 是守恒量。

(4) 哈密顿量能级与简并度

令

$$H = \frac{2\lambda}{R} \vec{S} \cdot \vec{L} \implies \vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}(\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2).$$

对电子而言, $\vec{S}^2 = s(s+1)$ 且 $s = \frac{1}{2} \implies \frac{3}{4}$. 又 $\vec{L}^2 = l(l+1)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 可取 $j = l \pm \frac{1}{2}$ (但若 $l = 0$ 时仅有 $j = \frac{1}{2}$). 于是 H 的本征值为

$$E_{l,j} = \frac{2\lambda}{R} \left[\frac{1}{2}(j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}) \right].$$

将 $j = j_{\pm} \equiv l \pm \frac{1}{2}$ 代入, 可简化如下两支:

$$j_+ = l + \frac{1}{2}: \quad j_+(j_+ + 1) - l(l+1) = l + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = l,$$

$$j_- = l - \frac{1}{2}: \quad j_-(j_- + 1) - l(l+1) = -(l+1).$$

故最终能谱是

$$\boxed{E_{l, l+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{R} l, \quad E_{l, l-\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda}{R} (l+1).}$$

对于 $l = 0$ 仅有 $j = \frac{1}{2}$ 一支, 对应能量 0. 对于 $l \geq 1$, 便有 $j = l \pm \frac{1}{2}$ 两个分支。

各能级的简并度则来自 j 表示的总角动量空间维数 $2j+1$ 。具体地:

$$\begin{cases} j = l + \frac{1}{2} \implies 2(l + \frac{1}{2}) + 1 = 2l + 2, \\ [6pt] j = l - \frac{1}{2} \implies 2(l - \frac{1}{2}) + 1 = 2l. \end{cases}$$

因此对于 $l \geq 1$, 上支能级的简并度是 $2(l+1)$, 下支能级的简并度是 $2l$; 而 $l = 0$ 仅对应 $j = \frac{1}{2}$ 、简并度 2、能量 $E = 0$ 。

总结

球面上螺旋电子态的哈密顿量可写为

$$H = \frac{2\lambda}{R} \vec{S} \cdot \vec{L},$$

并且守恒量是 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 。能谱分裂成 $j = l \pm \frac{1}{2}$ 两支, 其显式本征值为

$$E_{l, l+\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{R} l, \quad E_{l, l-\frac{1}{2}} = -\frac{\lambda}{R} (l+1),$$

对应的能级简并度分别为 $2(l+1)$ 与 $2l$ (对 $l \geq 1$; $l = 0$ 仅有 $j = \frac{1}{2}$ 分支, 简并度 2 且能量 0)。

6 一维杂质散射 (25 分)

真实材料中普遍存在的杂质对微观粒子的传播行为有着显著影响。安德森发现, 在一维和二维体系中, 任意有限浓度的杂质, 都将致使所有单粒子态局域化, 进而抑制宏观尺度的输运。这一现象被称为 " 安德森局域化 "。本题借助一维简化模型, 重现安德森局域化理论中的一些关键步骤。

如图 6.1 所示, 考虑在一维空间中运动且质量为 m 的粒子, 其量子力学哈密顿量为 (本题使用自然单位 $\hbar = 1$):

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

这里 $V(x) \geq 0$ 为原点附近宽度为 2σ 的对称势垒:

$$V(x) = V(-x), \quad V(|x| \geq \sigma) = 0$$

假设从左侧入射的波数为 $k > 0$ 的粒子, 存在如下的定态散射解:

$$\psi(x < -\sigma) = e^{ikx} + re^{-ikx}$$

$$\psi(x > \sigma) = te^{ikx}$$

这里 $r \neq 0$ 。本题中 t, r, k 均作为已知量, 且满足 $|t|^2 + |r|^2 = 1$, 可以用来表达结果。

(1) (10 分) 如图 6.2 所示, 现于原势垒右侧加入一与之完全相同的势垒, 两个势垒之间的距离为 $l \gg \sigma$ 。若已知从左侧入射的波数为 $k > 0$ 的粒子存在定态散射解:

$$\psi(x < -\sigma) = e^{ikx} + Re^{-ikx}$$

$$\psi(x > l + 3\sigma) = Te^{ikx}$$

求透射振幅 T 的表达式 (用 r, t, k, l 表达)。

(2) (5 分) 以势垒之间的距离 l 为变量, 透射率 $|T(l)|^2$ 的极大值是多少? 取到极大值时的条件是什么? (用 k, l, θ 表达, 其中 θ 是复数 r 的相位)。

(3) (5 分) 假设 l 是分布在 $[0, L]$ 之间的随机数, 其概率密度是均匀分布 $\rho(l) = L^{-1}$ 。求 $L \rightarrow \infty$ 的极限下, $|T(l)|^2$ 和 $\log |T(l)|^2$ 的期望:

$$\overline{|T|^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \rho(l) |T(l)|^2 dl$$

$$\overline{\log |T|^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \rho(l) \log |T(l)|^2 dl$$

(4) (5 分) 考虑 N 个相同的势垒, 相邻势垒之间的距离 $l_{1,2,\dots,N-1}$ 都是均匀分布在 $[0, L]$ 上的随机数。假设从左侧入射的粒子穿过全部势垒的透射振幅为 $T^{(N)}(l_1, \dots, l_{N-1})$ 。根据上一问的结果和物理直觉, 写下 (无需证明) 在 $L \rightarrow \infty$ 极限下, $\log |T^{(N)}|^2$ 的期望。

本题中可能需要用到的公式:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - x \cos \phi} \frac{d\phi}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (|x| < 1)$$

一维杂质散射—o1 解答

本题讨论一维量子散射问题：粒子质量 m ，入射平面波数 $k > 0$ ，单个势垒（位于 $|x| \leq \sigma$ 范围）具有透射振幅 t 、反射振幅 r ，满足

$$|t|^2 + |r|^2 = 1.$$

在自然单位制下 ($\hbar = 1$)，一维自由哈密顿量

$$H = -\frac{1}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x),$$

考虑两个或更多相同势垒排布时如何叠加散射，尤其关注当势垒间距 l 呈随机分布时，透射率的统计特征。

下文依题意分四问作答。

(1) 双势垒情形：透射振幅 T 的表达式

现将两道完全相同的势垒（透射幅 t ，反射幅 r ）并列放置，如图 2 所示。第一道势垒在 $x \in [-\sigma, \sigma]$ ，第二道势垒平移 l 后位于 $x \in [l - \sigma, l + \sigma]$ ，二者之间净空区域长度为 l 。从左侧入射时，在最右端 ($x > l + 3\sigma$) 只能有一个向右传输波 $\psi(x) = Te^{ikx}$ ，所要求的即是“整体”透射振幅 T 。

在无耗散 (无势能) 区，波函数满足平面波叠加，其在两道势垒之间会因第二道势垒的反射而在区间 $(\sigma, l - \sigma)$ 产生往返多重反射。将所有多重散射项作几何级数求和，可得一个众所周知的双势垒叠加公式：

$$T = \frac{t^2 e^{ikl}}{1 - r^2 e^{2ikl}}.$$

其中 e^{ikl} 是粒子在两道势垒之间向右传播获得的相移； $r^2 e^{2ikl}$ 对应一次往返区间所累积的相因子。

(2) 透射率的极大值与条件

透射率为 $|T|^2$ 。根据上式，有

$$|T|^2 = \frac{|t^2 e^{ikl}|^2}{|1 - r^2 e^{2ikl}|^2} = \frac{|t|^4}{|1 - r^2 e^{2i(kl+\theta)}|^2},$$

其中我们将

$$r = |r| e^{i\theta}.$$

显然，分母

$$|1 - |r|^2 e^{2i(kl+\theta)}|^2 = 1 + |r|^4 - 2|r|^2 \cos[2(kl + \theta)].$$

要使 $|T|^2$ 取得极大值, 需要分母最小化; 相当于令

$$\cos[2(kl + \theta)] = -1,$$

即

$$2(kl + \theta) = \pi + 2\pi n \implies kl + \theta = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

这给出了谐振透射的条件。此时分母

$$1 + |r|^4 + 2|r|^2 = (1 + |r|^2)^2,$$

故相应的透射率极大值为

$$|T|_{\max}^2 = \frac{|t|^4}{(1 + |r|^2)^2}.$$

若愿意, 也可用 $|r|^2 = 1 - |t|^2$ 替换, 得到

$$|T|_{\max}^2 = \frac{|t|^4}{(2 - |t|^2)^2}.$$

(3) 势垒间距 l 服从 $[0, L]$ 均匀分布时的平均值与对数平均

如果双势垒间距 l 为 $[0, L]$ 区间内均匀分布, 我们定义

$$\overline{|T|^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{dl}{L} |T(l)|^2, \quad \overline{\log |T|^2} = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \frac{dl}{L} \log |T(l)|^2.$$

由于 l 在 $[0, L]$ 上均匀变化时, kl 的相位 $\phi = 2kl + 2\theta$ 在 $[0, 2kL]$ 中均匀分布, 且在 $L \rightarrow \infty$ 极限可视为 $\phi \in [0, 2\pi]$ 均匀。令

$$|T(l)|^2 = \frac{|t|^4}{1 + |r|^4 - 2|r|^2 \cos \phi},$$

则所求均值可化为对 $\phi \in [0, 2\pi]$ 的平均。

(a) $\overline{|T|^2}$

首先有

$$\overline{|T|^2} = |t|^4 \left\langle \frac{1}{1 + |r|^4 - 2|r|^2 \cos \phi} \right\rangle_{\phi}.$$

我们记 $A = 1 + |r|^4$, $B = 2|r|^2$. 则分母 $A - B \cos \phi$ 满足 $A^2 - B^2 = (1 - |r|^4)^2 > 0$, 故可用标准积分 (亦见题后提示公式):

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{A - B \cos \phi} = \frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2}}.$$

由此得到

$$\left\langle \frac{1}{A - B \cos \phi} \right\rangle_{\phi} = \frac{1}{A^2 - B^2}^{1/2} = \frac{1}{1 - |r|^4}.$$

因此

$$\overline{|T|^2} = |t|^4 \cdot \frac{1}{1 - |r|^4}.$$

又因 $|r|^2 = 1 - |t|^2 \implies 1 - |r|^4 = 1 - (1 - |t|^2)^2 = 2|t|^2 - |t|^4 = |t|^2(2 - |t|^2)$. 最后化简为

$$\boxed{\overline{|T|^2} = \frac{|t|^4}{1 - |r|^4} = \frac{|t|^2}{2 - |t|^2}.$$

(b) $\overline{\log |T|^2}$

再看对数平均:

$$\log |T|^2 = \log |t|^4 - \log[1 + |r|^4 - 2|r|^2 \cos \phi].$$

故

$$\overline{\log |T|^2} = 4 \log |t| - \langle \log(1 + |r|^4 - 2|r|^2 \cos \phi) \rangle_{\phi}.$$

又有一项标准结果:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \log(A - B \cos \phi) = \log \left[\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2} \right],$$

将 $A = 1 + |r|^4$, $B = 2|r|^2$ 代入, 上节一样可算出 $\sqrt{A^2 - B^2} = 1 - |r|^4$, 于是

$$\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2} = \frac{(1 + |r|^4) + (1 - |r|^4)}{2} = 1.$$

故该对数平均恰好 $= \log(1) = 0$. 这样我们得到

$$\overline{\log |T|^2} = 4 \log |t| = 2 \log |t|^2.$$

可见其值为一个常数 (一般为负, 因为典型 $|t| < 1$).

(4) N 个势垒的情形: $\overline{\log |T^{(N)}|^2}$

若有 N 个相同势垒, 且相邻势垒之间的距离 l_1, l_2, \dots, l_{N-1} 都是在 $[0, L]$ 上均匀随机, 粒子从最左侧势垒外入射, 最终从最右侧透射. 其总透射幅记为 $T^{(N)}(l_1, \dots, l_{N-1})$. 虽然精确分析需考虑多重散射的叠加, 但根据 (3) 问所得规律以及安德森局域化的一般物理直觉, “随机相位” 使多势垒传输的对数往往近似可加, 从而在大 N 极限下总透射幅随 N 指数性减小. 这体现在对数平均上表现为线性随 N 增长.

换言之，在 $L \rightarrow \infty$ 极限下，对数透射系数的平均值大致呈

$$\overline{\log|T^{(N)}|^2} \approx (N-1) \overline{\log|T(l)|^2},$$

其中 $T(l)$ 可视为与“相邻两势垒 + 间隔 l ”对应的双势垒透射幅， $\overline{\log|T(l)|^2}$ 是它在随机 l 的对数平均。更具体地说，若 $|t| < 1$ ，则 $\overline{\log|T|^2} < 0$ ，会使 $\overline{\log|T^{(N)}|^2}$ 随 N 线性下沉，表明安德森局域化：典型透射强度 $\sim e^{\text{constant} \times N}$ 迅速衰减。

7 量子多体问题的基态 (25 分)

物理学中常常研究多电子系统的量子力学基态。真实多电子系统的基态通常难以计算；但是，对于相互作用形式较为简单的系统，在某些情况下能够直接得出基态波函数。

考虑一维体系中质量均为 m 的三个粒子，它们的坐标和动量分别用 $x_{1,2,3}$ 与 $p_{1,2,3}$ 表示。量子力学哈密顿量写为：

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + V(x_1, x_2, x_3)$$

这里 $V(x_1, x_2, x_3)$ 表示三个粒子之间的相互作用，其具体形式为：

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}m\omega^2 [(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2].$$

本题使用自然单位 ($\hbar = 1$)。

(1) (5 分) 证明题干所述哈密顿量的全部本征值可以表达为下式：

$$E(n, P) = \frac{P^2}{6m} + (n+1)\sqrt{3}\omega$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots, P$ 为体系总动量。求 $E(n, P)$ 能级的简并度。

(2) (5 分) 证明对应 $E(n, P=0)$ 的本征态波函数可写为如下形式：

$$\Psi_n(x_1, x_2, x_3) = P_n(x_1, x_2, x_3) S(x_1, x_2, x_3)$$

其中 $P_n(x_1, x_2, x_3)$ 是关于坐标的 n 次多项式， $S(x_1, x_2, x_3)$ 是与 n 无关的函数，且对 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的置换保持不变：

$$S(x_1, x_2, x_3) = S(x_2, x_3, x_1) = S(x_3, x_1, x_2) = S(x_2, x_1, x_3) = S(x_1, x_3, x_2) = S(x_3, x_2, x_1)$$

(3) (10 分) 证明当三个粒子为全同玻色子时，基态能量为：

$$E_G^{(B)} = E(0, 0) = \sqrt{3}\omega$$

当三个粒子为全同费米子时，基态能量为：

$$E_G^{(F)} = E(3, 0) = 4\sqrt{3}\omega$$

写出三个粒子为全同费米子时，基态的波函数（无需归一化），并加以证明。

(4) (5 分) 现假设共有 N 个全同费米子，相互作用为：

$$V(x_1, \dots, x_N) = \frac{m\omega^2}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2$$

(注意当 $N = 3$ 时该相互作用退化为公式 (7. 2))。无需过程和归一化，直接写出体系基态的波函数。

本题中可能需要的知识：质量为 m ，频率为 ω 的一维谐振子未归一化的本征态波函数为 $H_n(x) \exp(-m\omega x^2/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)，其中 $H_n(x)$ 是 n 阶多项式。

量子多体问题的基态—o1 解答

本题讨论一维体系中三个粒子 (质量均为 m) 的量子力学哈密顿量及其本征态。设粒子坐标、动量分别为 $x_{1,2,3}$ 与 $p_{1,2,3}$, 哈密顿量为 (自然单位下 $\hbar = 1$)

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \left[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \right]. \quad (1)$$

题意先给出本征能量的通用形式

$$E(n, P) = \frac{P^2}{6m} + (n+1) \sqrt{3} \omega,$$

其中 P 为体系总动量, $n = 0, 1, 2, \dots$ 为简并角量子数 (稍后将见到其物理含义和简并度)。本题分四问分析此体系的能级结构以及在玻色子或费米子全同粒子情形下的基态。

(1) 能谱 $E(n, P)$ 及其简并度

分离中心质心与相对坐标 首先, 由于势能只依赖于坐标差 $(x_i - x_j)$, 可以定义总动量

$$P = p_1 + p_2 + p_3$$

以及相对坐标 (例如可选用两个正交的 Jacobi 坐标)

$$y_1 = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2} \right).$$

一方面, P 对应中心质心平动 (无势能约束); 另一方面, (y_1, y_2) 描述相对运动, 作用在其上的势能形同

$$V_{\text{rel}}(y_1, y_2) = \frac{1}{2} m (\sqrt{3} \omega)^2 (y_1^2 + y_2^2).$$

也就是说, 这是一个二维简谐振子频率 $\sqrt{3} \omega$ 的势能。于是总哈密顿量拆分为

$$H = \underbrace{\frac{P^2}{6m}}_{\text{质心动能}} + \underbrace{\left[\frac{p_{y_1}^2 + p_{y_2}^2}{2m} + \frac{1}{2} m (\sqrt{3} \omega)^2 (y_1^2 + y_2^2) \right]}_{\text{二维振子}},$$

其中 p_{y_1}, p_{y_2} 是相对坐标的动量算符。显然前者贡献 $\frac{P^2}{6m}$, 后者贡献 $(n+1)\sqrt{3}\omega$ (二维谐振子第 n 激发能, $n = 0, 1, 2, \dots$)。从而使得

$$E(n, P) = \frac{P^2}{6m} + (n+1) \sqrt{3} \omega.$$

二维振子的简并度 在二维谐振子中, 能级依量子数 $n = n_r + \ell$ (例如总振动量阶数) 确定, 其简并度为 $n+1$. 故对固定的 n , 在 (y_1, y_2) 空间有 $n+1$ 维的退简并。而中心质心平动部分能连续取 P , 不会破坏这一简并 (只是在连续谱方向额外添一维)。因此题中

对每个 n, P , 能级简并度 $= n+1$.

(若考虑系统中还有自旋或其他内部自由度, 则需另行计入。题意中仅指“空间波函数的几何简并度”。)

(2) $E(n, P=0)$ 本征态的结构及对称性

从上面坐标分离可见, 总动量为零时, 相应的本征态波函数 $\Psi_n(x_1, x_2, x_3)$ 可分写为“相对运动的态函数”乘以“质心坐标依赖的常数 (或平面波)”。如果只关心 $P=0$, 可直接将三坐标满足 $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 的约束后写出波函数。

题意指出: 这些本征态可写为

$$\Psi_n(x_1, x_2, x_3) = P_n(x_1, x_2, x_3) S(x_1, x_2, x_3),$$

其中 P_n 是关于 (x_1, x_2, x_3) 的某个次数为 n 的多项式, $S(x_1, x_2, x_3)$ 则不含 n 、对 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的置换保持不变。这个 S 正是与高斯因子类似的通解 (相对坐标二维振子基态的空间部分)——它对交换粒子坐标不变, 即

$$S(x_1, x_2, x_3) = S(x_2, x_3, x_1) = S(x_3, x_1, x_2) = \dots$$

而 P_n 则是关于相对坐标 (y_1, y_2) 的调制多项式, 对应激发量子数 n 。这样便表明: 对于 $P=0$ 的能级, 波函数可因式分解为一个公共的对称函数 S 乘上不同 n 次多项式 P_n 。

(3) 三个全同粒子 (玻色子或费米子) 的基态能量及波函数

(a) **玻色子情形** 如果三个粒子为全同玻色子, 则总空间波函数应在任何两粒子坐标交换时保持不变 (对称性)。在第 (1) 节的二维振子能级 $(n+1)\sqrt{3}\omega$ 中, 最低能级对应 $n=0$ 。此时相对坐标部分是振子基态, 其在 (y_1, y_2) 空间为纯高斯且天然对称于粒子交换 (因为 $(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2$ 不变)。同时玻色子对称性也不要求加上其它符号因子或多项式激发。故玻色体系基态能量便是

$$E_G^{(B)} = E(0, 0) = \sqrt{3}\omega.$$

(b) **费米子情形** 若三个粒子为全同费米子 (自旋在此忽略, 或假设自旋已极化只剩下空间反对称要求), 则总空间波函数要在交换任意两粒子坐标时变号。这样一来, 最低的 $n=0$ 对称基态已被排斥; 只有将相对振子量子数 n 提高到能容纳一个反对称化的波函数结构时, 才能满足费米统计。经详细分析 (或通过 2D 简谐振子语境: 要使波函数对 (x_1, x_2, x_3) 两两交换反对称, 需要最少加 3 个振动量子数), 可知最低可行的 n 为 3。因而费米体系基态能量即

$$E_G^{(F)} = E(3, 0) = (3+1)\sqrt{3}\omega = 4\sqrt{3}\omega.$$

(c) **基态波函数 (费米子)** 令我们只写出相对运动的空间部分 ($P=0$), 并忽略归一化。可把二维振子 ($n=3$) 中完全反对称的组合映射回 (x_1, x_2, x_3) 。等价地, 也可直接说: “在形如 $\exp[-\alpha \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2]$ 的共同基态高斯上, 乘以一个反对称的三次多项式 $\sum c_{ijk} (x_i -$

$x_j)(x_j - x_k)(x_k - x_i) \dots$ ”。最简单的写法：用“反对称化算符 \mathcal{A} ”作用在 $n = 3$ 振子多项式与高斯因子上即可。或更直观地：

$$\Psi_{\text{F,gs}}(x_1, x_2, x_3) = \left[(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) \right] \exp \left[-\frac{m\omega}{4}((x_1 - x_2)^2 + \dots) \right].$$

它在交换任意 (x_i, x_j) 时显然反号，故满足全同费米子的交换要求，且对应相对量子数 $n = 3$ 之最低激发。这样便说明三个全同费米子时的基态能量为 $4\sqrt{3}\omega$ ，波函数为上述（或任何等价的线性组合）形式。

(4) 一般 N 个全同费米子的相互作用基态波函数

题意最后推广到 N 个全同粒子，其相互作用势为

$$V(x_1, \dots, x_N) = \frac{m\omega^2}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2.$$

当 $N = 3$ 时退化回 (1) 式。类似地可以分解为中心质心与 $(N - 1)$ 个正交相对坐标的简谐振动，且每个相对运动模式频率均为常数 $\propto \omega$ 。对全同费米子而言，基态的相对波函数必然反对称化；其最简洁的表达，即“在对称的高斯因子上乘 $\prod_{i < j} (x_i - x_j)$ ”，这和一维 Calogero 模型 (在耦合常数 $g = 1$ 时) 的基态形式类似。具体地，无需推导与归一化系数，直接写作：

$$\Psi_{\text{F,gs}}(x_1, \dots, x_N) \propto \left[\prod_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j) \right] \exp \left[-\frac{m\omega}{4} \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2 \right].$$

这是一个在 $x_i \leftrightarrow x_j$ 交换下带负号的波函数，并且满足谐振子型外势（依赖坐标差）的束缚。即为 N 个全同费米子在此相互作用下的基态波函数。