

第一届“天目杯”理论物理冬令营竞赛-DeepSeek 解答

2025 年 1 月 27 日

1 矢量场的积分 (10 分)

已知三维空间矢量场 $\vec{F} = (x^2y + z)\hat{x} + (2xy^2 + 2z)\hat{y} + (3z^2 - x^3)\hat{z}$ ，其中 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ 是三个相互正交的单位矢量， $\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$ 。S 为上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 。C 为 S 的边界，取向如图 1.1 所示。

(1) (5 分) 计算曲线积分 $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ ，其中 $d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$ 。

(2) (5 分) 利用斯托克斯公式验证上述结果。

矢量场的积分-DeepSeek 解答

(1)

解：路径 C 位于 $z = 0$ 平面，是半径 $R = 2$ 的圆。参数化为：

$$x = 2 \cos \theta, \quad y = 2 \sin \theta, \quad z = 0 \quad (\theta \in [0, 2\pi])$$

矢量场在 C 上简化为：

$$\vec{F}|_{z=0} = (4 \cos^2 \theta \cdot 2 \sin \theta) \hat{x} + (2 \cdot 2 \cos \theta \cdot 4 \sin^2 \theta) \hat{y} - 8 \cos^3 \theta \hat{z}$$

线积分仅保留 x, y 分量：

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} ((8 \cos^2 \theta \sin \theta)(-2 \sin \theta) + (16 \cos \theta \sin^2 \theta)(2 \cos \theta)) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-16 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 32 \cos^2 \theta \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 16 \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta = 4\pi \end{aligned}$$

最终结果：

$$\boxed{4\pi}$$

(2)

解：计算旋度：

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{F} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2y + z & 2xy^2 + 2z & 3z^2 - x^3 \end{vmatrix} \\ &= (-2, 1 + 3x^2, 2y^2 - x^2)\end{aligned}$$

参数化上半球面 S 为球坐标：

$$x = 2 \sin \theta \cos \phi, \quad y = 2 \sin \theta \sin \phi, \quad z = 2 \cos \theta \quad (\theta \in [0, \pi/2], \phi \in [0, 2\pi])$$

面积元 $d\vec{S} = 4 \sin \theta (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) d\theta d\phi$ ，计算曲面积分：

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} [-8 \sin^2 \theta \cos \phi + (1 + 12 \sin^2 \theta \cos^2 \phi) 4 \sin^2 \theta \sin \phi \\ &\quad + 16 \sin^3 \theta \cos \theta (2 \sin^2 \phi - \cos^2 \phi)] d\theta d\phi\end{aligned}$$

通过对称性分析，前两项积分均为零，第三项积分结果为：

$$16 \int_0^{2\pi} (2 \sin^2 \phi - \cos^2 \phi) d\phi \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta = 16 \cdot \pi \cdot \frac{1}{4} = 4\pi$$

验证结果：

$$\boxed{4\pi}$$

2 磁场中的极性分子 (20 分)

水分子, 氟化氢等极性分子具有电偶极矩。本题研究一个约束在二维平面内的极性分子的运动。我们采用如图 2. 1 所示的简化模型描述极性分子: 两个电荷量分别为 $\pm q$ 的点电荷由一个刚性棒连接, 棒长为 d , 分子质心位于正负电荷的几何中心位置, 且整个分子躺在 xOy 面内。分子的总质量为 M , 绕 z 轴的转动惯量为 I 。为了表示分子的位置和指向, 设质心坐标为 (x, y) , 负电荷指向正电荷的矢量与 x 轴正方向的夹角为 θ 。在 z 方向上存在一个匀强磁场 B 。

(1) (5 分) 已知一个电量为 q 的带电粒子与磁场的耦合通过如下拉氏量描述:

$$L = L_0 + q\vec{r} \cdot \vec{A}(\vec{r})$$

其中 L_0 为无外磁场情况下粒子的拉氏量。 \vec{r} 为粒子的坐标, \vec{A} 为矢量势: $A_x = 0$, $A_y = Bx$ 。写下题干所述极性分子模型的拉氏量 L , 结果用质心坐标 x, y, θ 与对应的时间导数 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}$ 表达。

(2) (2 分) 通过欧拉-拉格朗日方程得到极性分子的运动方程。

(3) (3 分) 通过给 $M\dot{x}, M\dot{y}$ 各自适当添加一项, 构造出两个守恒量 P_x 与 P_y (本题中称之为称膺动量)。

(4) (5 分) 给定膺动量 $P_x > 0, P_y = 0$ 的条件下, 当且仅当分子指向角 θ 取一些特殊值 θ_0 时, 分子质心做匀速直线运动。求所有的 θ_0 和对应的分子质心速度 \dot{x}, \dot{y} 。

(5) (5 分) 在上一问所求得的 θ_0 中, 哪一个对小扰动是稳定的? 此时, 如果外界对 θ 施加一个小扰动, θ 将以频率 ω 振动。求 ω 。

磁场中的极性分子-DeepSeek 解答

(1)

极性分子拉格朗日量为:

$$L = \frac{1}{2}M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 + qBd \cos \theta (\dot{y} + x\dot{\theta})$$

(2)

运动方程为:

$$M\ddot{x} = qBd \cos \theta \dot{\theta}$$

$$M\ddot{y} = qBd \sin \theta \dot{\theta}$$

$$I\ddot{\theta} = -qBd (\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y})$$

(3)

质心动量为:

$$P_x = M\dot{x} - qBd \sin \theta$$

$$P_y = M\dot{y} + qBd \cos \theta$$

(4)

当 $P_x > 0$, $P_y = 0$ 时, $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 。对应质心速度:

$$\begin{aligned} \theta_0 = \frac{\pi}{2} : \quad \dot{x} &= \frac{P_x + qBd}{M}, \quad \dot{y} = 0 \\ \theta_0 = \frac{3\pi}{2} : \quad \dot{x} &= \frac{P_x - qBd}{M}, \quad \dot{y} = 0 \end{aligned}$$

(5)

稳定平衡点为 $\theta_0 = \frac{3\pi}{2}$, 振动频率为:

$$\omega = \sqrt{\frac{qBdP_x}{IM}}$$

3 冬季采暖的热力学 (15 分)

热泉是一种常用的冬季采暖设备。热泉能从低温热源吸热，向高温热源放热，此过程中需要外界对它做功。假设有一台理想热泉，用于为一座建筑物室内供暖。该热泉功率（单位时间所做的功）记为 P 。它以温度为 T_0 的建筑外空气作为低温热源。同时，建筑物会向外界散热，单位时间损失的热量为 $\alpha(T - T_0)$, $\alpha > 0$ 为一常数， T 表示建筑物室内温度。

(1) (5 分) 热泉单位时间向建筑物室内供热是多少？

(2) (5 分) 热泵开启后一段时间，建筑物室内将达到恒定温度 T_e 。求 T_e 。

(3) (5 分) 该建筑也可以用功率为 P 的电加热器采暖。求此时建筑物室内的恒定温度 T'_e ，并依此说明电加热采暖效果不如热泵。

冬季采暖的热力学—DeepSeek 解答

(1)

热泵单位时间向室内供热为卡诺热泵的供热量：

$$Q_h = \text{COP} \cdot P = \frac{T}{T - T_0} P$$

因此单位时间供热量为：

$$\boxed{\frac{PT}{T - T_0}}$$

(2)

热平衡时供热量等于散热量：

$$\frac{PT_e}{T_e - T_0} = \alpha(T_e - T_0)$$

整理得二次方程：

$$\alpha T_e^2 - (2\alpha T_0 + P)T_e + \alpha T_0^2 = 0$$

解得恒定温度为：

$$T_e = \frac{2\alpha T_0 + P + \sqrt{P(4\alpha T_0 + P)}}{2\alpha}$$

取物理意义解：

$$\boxed{T_e = T_0 + \frac{P}{2\alpha} + \sqrt{\frac{P^2}{4\alpha^2} + \frac{PT_0}{\alpha}}}$$

(3)

电加热时平衡温度满足：

$$P = \alpha(T'_e - T_0) \quad \Rightarrow \quad T'_e = \boxed{T_0 + \frac{P}{\alpha}}$$

比较两温度：

$$T_e - T'_e = \sqrt{\frac{P^2}{4\alpha^2} + \frac{PT_0}{\alpha}} - \frac{P}{2\alpha} > 0 \quad (\text{当 } T_0 > 0)$$

说明热泵采暖效果优于电加热。

4 轴子电动力学 (25 分)

轴子是一种假想的基本粒子。作为暗物质的可能组分，轴子是宇宙学和粒子物理学的重要研究对象。凝聚态物理中，一些物质的理论模型与轴子的理论模型高度类似。本题探讨轴子对电磁场的影响。理论家通过一个实标量场 $\alpha(\mathbf{r})$ 描述轴子，其中 α 为实数， \vec{r} 为空间坐标。真空中的轴子场可修正电场高斯定律和安培定律（方程采用自然单位。在此单位制下，真空中的光速与真空介电常数均为 1）：

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \vec{E} + \vec{j} - \vec{E} \times \vec{\nabla} \alpha\end{aligned}$$

$\alpha(\vec{r})$ 为不随时间演化的轴子场。 \vec{E} 是电场强度， \vec{B} 是磁感应强度。 ρ 为自由电荷密度。 j 为自由电流密度。电磁学的其它基本定律不受影响。

(1) (5 分) 写出场 $\alpha(\vec{r})$ 在时间反演（时间 $t \rightarrow -t$ ），空间反演（坐标 $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ ）操作下的变换规则，从而保证电磁学基本定律满足时间与空间反演对称性。

(2) (10 分) 如图 4. 1 所示， $z > 0$ 半空间中均匀分布着轴子场： $\alpha(\vec{r}) = \alpha_0 > 0$ ； $z < 0$ 的半空间中无轴子。类比常规电动力学在介质界面处的连接条件，写下 $z = 0$ 处 \vec{E} 与 \vec{B} 各分量的连接条件（这里假设界面上不存在自由电荷和自由电流）。

(3) (5 分) 轴子场分布同图 4. 1。 $z < 0$ 半空间中存在均匀电磁场： $\vec{E} = E_0 \hat{x}$, $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ 。 $\rho = 0, j = 0$ 。求 $z > 0$ 半空间中的 \vec{E} 和 \vec{B} 。

(4) (5 分) 轴子场分布同图 4. 1。 $\rho = 0, j = 0$ 。频率为 ω ，极化方向为 x 的平面电磁波沿着 z 方向自 $z < 0$ 半空间入射。电场分布为 $\vec{E}(z) = E_0 \hat{x} \cos(\omega(z - t))$ 。透射到 $z > 0$ 半空间的电磁波的极化矢量将发生偏转，求偏转方向和偏转角度 θ 。

轴子电动力学–DeepSeek 解答

(1)

为保证电磁定律的时空反演对称性：

- 时间反演 ($t \rightarrow -t$): $\alpha \rightarrow \alpha$ ，因方程中不含 $\dot{\alpha}$
- 空间反演 ($\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$): $\alpha \rightarrow -\alpha$ ，因 \vec{B} 为赝矢量， \vec{E} 为真矢量，保持 $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \alpha$ 项在空间反演下不变

变换规则：

$$\boxed{\mathcal{T}: \alpha \rightarrow \alpha, \quad \mathcal{P}: \alpha \rightarrow -\alpha}$$

(2)

界面连接条件推导:

$$\text{电场法向分量: } E_z^+ - E_z^- = -B_z(\alpha_0 - 0)$$

$$\text{电场切向分量: } E_{x,y}^+ = E_{x,y}^-$$

$$\text{磁场法向分量: } B_z^+ = B_z^-$$

$$\text{磁场切向分量: } B_{x,y}^+ - B_{x,y}^- = -E_z(\alpha_0 - 0)\epsilon^{zjk}$$

最终条件:

$$\begin{cases} E_z^+ = E_z^- - B_z\alpha_0 \\ E_{x,y}^+ = E_{x,y}^- \\ B_z^+ = B_z^- \\ B_{x,y}^+ = B_{x,y}^- + E_z\alpha_0\hat{z} \times \hat{e}_{x,y} \end{cases}$$

(3)

当 $z > 0$ 时 $\nabla\alpha = 0$, 修正方程为:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = E_0\hat{x}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \dot{\vec{E}} - \vec{E} \times \nabla\alpha = 0 \Rightarrow \vec{B} = B_0\hat{z}$$

因此场保持原状:

$$\vec{E} = E_0\hat{x}, \quad \vec{B} = B_0\hat{z}$$

(4)

透射波满足修正波动方程:

$$(\partial_t^2 - \nabla^2)\vec{E} = \alpha_0(\partial_z E_x\hat{y} - \partial_z E_y\hat{x})$$

设透射波为 $\vec{E} = E_x\hat{x} + E_y\hat{y}$, 解得:

$$E_y = \frac{\alpha_0}{\omega} E_x$$
$$\tan\theta = \frac{E_y}{E_x} = \frac{\alpha_0}{\omega}$$

极化偏转:

$$\theta = \arctan\left(\frac{\alpha_0}{\omega}\right)$$

5 球面上的螺旋电子态 (20 分)

三维拓扑绝缘体的表面存在螺旋电子态。如果表面是一个无限大的 xy 平面，那么电子哈密顿量由下式给出：

$$H = \lambda(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \hat{z},$$

其中 $\lambda > 0$ 是自旋轨道耦合强度， \hat{z} 是 xy 平面的法向。 $\vec{\sigma}$ 是由三个泡利矩阵构成的三维矢量。 $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ 是电子自旋角动量。 \vec{p} 是限制在 xy 平面上的动量。

现在考虑一个球形的拓扑绝缘体，其半径为 R 。本题研究该表面上的螺旋电子态。定义位置矢量 $\vec{R} = (x, y, z)$ 。对应的单位矢量 $\hat{R} = \vec{R}/R$ 。本题使用自然单位 $\hbar = 1$ 。

(1) (5 分) 论证球面上的电子动量可以用 $\vec{p} = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]$ 表示。

(2) (5 分) 球面上螺旋电子态的哈密顿量可以表示成三维轨道角动量 \vec{L} 和自旋的耦合。写出其具体形式。

(3) (5 分) 证明总角动量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ 是守恒量。

(4) (5 分) 求本题第 (2) 问中哈密顿量的能级和简并度，使用轨道角动量 \vec{L} 对应的量子数 l 来表达 (\vec{L}^2 的本征值是 $l(l+1)$)。

球面上的螺旋电子态—DeepSeek 解答

(1)

球面上的动量算符需投影到切向空间。三维梯度算符分解为径向和切向部分：

$$\vec{\nabla} = \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla}) + \vec{\nabla}_{\parallel}$$

切向动量算符为：

$$\vec{p} = -i\vec{\nabla}_{\parallel} = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]$$

故球面动量表达式为：

$$\boxed{\vec{p} = -i[\vec{\nabla} - \hat{R}(\hat{R} \cdot \vec{\nabla})]}$$

(2)

平面哈密顿量推广至球面，法向为 \hat{R} ：

$$H = \lambda(\vec{\sigma} \times \vec{p}) \cdot \hat{R}$$

利用 $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p}$ 及 $\vec{p} \times \hat{R} = -\vec{L}/R$ ，得：

$$H = \frac{\lambda}{R} \vec{L} \cdot \vec{\sigma}$$

因此哈密顿量为:

$$H = \frac{\lambda}{R} \vec{L} \cdot \vec{\sigma}$$

(3)

总角动量 $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, 其中 $\vec{S} = \vec{\sigma}/2$ 。哈密顿量可表为:

$$H = \frac{2\lambda}{R} \vec{L} \cdot \vec{S}$$

由角动量耦合关系 $\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$, 且 $[J^2, J_i] = 0$, 故:

$$[H, J_i] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{J} \text{ 为守恒量}}$$

(4)

哈密顿量本征值由 J^2 量子数 $j = l \pm 1/2$ 确定:

$$E = \frac{\lambda}{R} \left[j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]$$

具体能级及简并度:

- $j = l + 1/2$ 时:

$$E_+ = \frac{\lambda l}{R}, \quad \text{简并度 } 2j + 1 = \boxed{2l + 2}$$

- $j = l - 1/2$ (仅当 $l \geq 1$) 时:

$$E_- = -\frac{\lambda(l+1)}{R}, \quad \text{简并度 } 2j + 1 = \boxed{2l}$$

6 一维杂质散射 (25 分)

真实材料中普遍存在的杂质对微观粒子的传播行为有着显著影响。安德森发现，在一维和二维体系中，任意有限浓度的杂质，都将致使所有单粒子态局域化，进而抑制宏观尺度的输运。这一现象被称为 " 安德森局域化 "。本题借助一维简化模型，重现安德森局域化理论中的一些关键步骤。

如图 6.1 所示，考虑在一维空间中运动且质量为 m 的粒子，其量子力学哈密顿量为（本题使用自然单位 $\hbar = 1$ ）：

$$H = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$$

这里 $V(x) \geq 0$ 为原点附近宽度为 2σ 的对称势垒：

$$V(x) = V(-x), \quad V(|x| \geq \sigma) = 0$$

假设从左侧入射的波数为 $k > 0$ 的粒子，存在如下的定态散射解：

$$\begin{aligned}\psi(x < -\sigma) &= e^{ikx} + re^{-ikx} \\ \psi(x > \sigma) &= te^{ikx}\end{aligned}$$

这里 $r \neq 0$ 。本题中 t, r, k 均作为已知量，且满足 $|t|^2 + |r|^2 = 1$ ，可以用来表达结果。

(1) (10 分) 如图 6.2 所示，现于原势垒右侧加入一与之完全相同的势垒，两个势垒之间的距离为 $l \gg \sigma$ 。若已知从左侧入射的波数为 $k > 0$ 的粒子存在定态散射解：

$$\begin{aligned}\psi(x < -\sigma) &= e^{ikx} + Re^{-ikx} \\ \psi(x > l + 3\sigma) &= Te^{ikx}\end{aligned}$$

求透射振幅 T 的表达式（用 r, t, k, l 表达）。

(2) (5 分) 以势垒之间的距离 l 为变量，透射率 $|T(l)|^2$ 的极大值是多少？取到极大值时的条件是什么？（用 k, l, θ 表达，其中 θ 是复数 r 的相位）。

(3) (5 分) 假设 l 是分布在 $[0, L]$ 之间的随机数，其概率密度是均匀分布 $\rho(l) = L^{-1}$ 。求 $L \rightarrow \infty$ 的极限下， $|T(l)|^2$ 和 $\log |T(l)|^2$ 的期望：

$$\begin{aligned}\overline{|T|^2} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \rho(l) |T(l)|^2 dl \\ \overline{\log |T|^2} &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int_0^L \rho(l) \log |T(l)|^2 dl\end{aligned}$$

(4) (5 分) 考虑 N 个相同的势垒，相邻势垒之间的距离 $l_{1,2,\dots,N-1}$ 都是均匀分布在 $[0, L]$ 上的随机数。假设从左侧入射的粒子穿过全部势垒的透射振幅为 $T^{(N)}(l_1, \dots, l_{N-1})$ 。根据上一问的结果和物理直觉，写下（无需证明）在 $L \rightarrow \infty$ 极限下， $\log |T^{(N)}|^2$ 的期望。

本题中可能需要用到的公式：

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - x \cos \phi} \frac{d\phi}{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \quad (|x| < 1)$$

一维杂质散射–DeepSeek 解答

(1)

透射振幅 T 的表达式为：

$$T = \frac{t^2 e^{ikl}}{1 - r^2 e^{i2kl}}$$

其中 r 为反射振幅， t 为透射振幅， k 为波数， l 为势垒间距。最终结果：

$$T = \frac{t^2 e^{ikl}}{1 - r^2 e^{i2kl}}$$

(2)

透射率极大值为：

$$|T|_{\max}^2 = 1$$

当且仅当满足共振条件：

$$kl + \theta = n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

其中 θ 为复数 r 的相位 ($r = |r|e^{i\theta}$)。

(3)

平均透射率与对数透射率：

$$\overline{|T|^2} = \frac{|t|^2}{1 + |r|^2} = \frac{1 - |r|^2}{1 + |r|^2}$$

$$\overline{\log |T|^2} = 2 \log |t|^2$$

(4)

N 个势垒的透射对数期望：

$$\overline{\log |T^{(N)}|^2} = N \log |t|^2$$

7 量子多体问题的基态 (25 分)

物理学中常常研究多电子系统的量子力学基态。真实多电子系统的基态通常难以计算；但是，对于相互作用形式较为简单的系统，在某些情况下能够直接得出基态波函数。

考虑一维体系中质量均为 m 的三个粒子，它们的坐标和动量分别用 $x_{1,2,3}$ 与 $p_{1,2,3}$ 表示。量子力学哈密顿量写为：

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m} + V(x_1, x_2, x_3)$$

这里 $V(x_1, x_2, x_3)$ 表示三个粒子之间的相互作用，其具体形式为：

$$V(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}m\omega^2 [(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2].$$

本题使用自然单位 ($\hbar = 1$)。

(1) (5 分) 证明题干所述哈密顿量的全部本征值可以表达为下式：

$$E(n, P) = \frac{P^2}{6m} + (n+1)\sqrt{3}\omega$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots, P$ 为体系总动量。求 $E(n, P)$ 能级的简并度。

(2) (5 分) 证明对应 $E(n, P=0)$ 的本征态波函数可写为如下形式：

$$\Psi_n(x_1, x_2, x_3) = P_n(x_1, x_2, x_3) S(x_1, x_2, x_3)$$

其中 $P_n(x_1, x_2, x_3)$ 是关于坐标的 n 次多项式， $S(x_1, x_2, x_3)$ 是与 n 无关的函数，且对 $\{x_1, x_2, x_3\}$ 的置换保持不变：

$$S(x_1, x_2, x_3) = S(x_2, x_3, x_1) = S(x_3, x_1, x_2) = S(x_2, x_1, x_3) = S(x_1, x_3, x_2) = S(x_3, x_2, x_1)$$

(3) (10 分) 证明当三个粒子为全同玻色子时，基态能量为：

$$E_G^{(B)} = E(0, 0) = \sqrt{3}\omega$$

当三个粒子为全同费米子时，基态能量为：

$$E_G^{(F)} = E(3, 0) = 4\sqrt{3}\omega$$

写出三个粒子为全同费米子时，基态的波函数（无需归一化），并加以证明。

(4) (5 分) 现假设共有 N 个全同费米子，相互作用为：

$$V(x_1, \dots, x_N) = \frac{m\omega^2}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq N} (x_i - x_j)^2$$

(注意当 $N=3$ 时该相互作用退化为公式 (7. 2))。无需过程和归一化，直接写出体系基态的波函数。

本题中可能需要的知识：质量为 m ，频率为 ω 的一维谐振子未归一化的本征态波函数为 $H_n(x) \exp(-m\omega x^2/2)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)，其中 $H_n(x)$ 是 n 阶多项式。

量子多体问题的基态–DeepSeek 解答

(1)

通过坐标变换分解质心运动和相对振动：

$$H_{\text{cm}} = \frac{P^2}{6m}, \quad H_{\text{vib}} = \sqrt{3}\omega (a^\dagger a + b^\dagger b + 1)$$

总能量为：

$$E(n, P) = \frac{P^2}{6m} + (n+1)\sqrt{3}\omega \quad (n = n_1 + n_2)$$

简并度为量子数 n 对应的振动态组合数：

简并度 $n+1$

(2)

相对坐标的振动波函数具有交换对称性。设 $\{q_i\}$ 为相对坐标的对称多项式基，高斯核为：

$$S(x_1, x_2, x_3) = e^{-\frac{m\sqrt{3}\omega}{2} \sum_{i<j} (x_i - x_j)^2}$$

任意 $P=0$ 的本征态可表示为：

$\Psi_n = P_n(x_1, x_2, x_3)S(x_1, x_2, x_3)$

(3)

- 玻色子基态：取 $n=0$ ，波函数全对称：

$$E_G^{(B)} = \sqrt{3}\omega$$

- 费米子基态：需填充三个最低反对称态至 $n=3$ ：

$$E_G^{(F)} = 4\sqrt{3}\omega$$

波函数为：

$$\Psi_F = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^3 H_{\sigma(i)-1}(x_i) e^{-\frac{m\sqrt{3}\omega}{2} x_i^2}$$

其中 H_n 为厄米多项式。

(4)

N 费米子基态波函数为：

$$\Psi^{(N)} = \det [H_{j-1}(x_i)]_{i,j=1}^N \prod_{k=1}^N e^{-\frac{m\sqrt{3}\omega}{2}x_k^2}$$